

大连市第二十九届 高 等 数 学 竞 赛 试 卷
(数学专业)

学 校
姓 名

考试时间：150 分钟，满分 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	七
分 数							

阅卷人	
得 分	

一、(15 分) 已知空间的两条直线

$l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{2},$
 $l_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1}.$

- (1) 证明 l_1 和 l_2 异面.
(2) 求 l_1 和 l_2 公垂线的标准方程.
(3) 求连接 l_1 上的任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程.

阅卷人	
得 分	

二、(12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导函数并且 $f(a) = 0$, 证明:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

学 校

姓 名

阅卷人	
得 分	

三、(13 分) 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3n-2}$ 条件收敛并求其和。

阅卷人	
得 分	

四、(13 分) 设 $u=f(z)$ ，其中 z 为方程式 $z=x+y\varphi(z)$ 所定义的关于变量

x 和 y 的隐函数。试证： $\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{\left[\varphi(z)\right]^n\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$ ，(n 为自然数)。

学 校

姓 名

阅卷人	
得 分	

五、（12 分）设 $F(r)=\int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)d\theta, \quad r\in R.$
求证： $F(r)\equiv 2\pi.$

阅卷人	
得 分	

六、（15 分） 设 V_1,V_2 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的二个子空间， 且 $\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V)=n.$ 试证： 必存在一个线性变换 σ ， 使得 $\text{Im}(\sigma)=V_2, \text{Ker}(\sigma)=V_1.$

学 校	
姓 名	

阅卷人	
得 分	

七、(20 分) 设 σ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 上的线性变换. 如果 σ 的矩阵可以对角化, 则对 σ 的任意一个不变子空间 M , 证明:

(1) $\sigma|_M$ 的矩阵也可以对角化.

(2) 存在 σ 的不变子空间 N , 使得 $V = M \oplus N$.