

大连市第二十九届 高等数学竞赛试卷 (数学专业)

学 校
姓 名

考试时间：150 分钟，满分 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	七
分 数							

阅卷人	
得 分	

一、(15 分) 已知空间的两条直线

$$l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{2},$$

$$l_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1}.$$

- (1) 证明 l_1 和 l_2 异面;
- (2) 求 l_1 和 l_2 公垂线的标准方程;
- (3) 求连接 l_1 上的任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程。

(1) 证明: l_1 上有点 $r_1 = (1, 3, -3)$, 方向向量为 $v_1 = (1, 2, 2)$ 。

l_2 上有点 $r_2 = (-1, -1, -1)$, 方向向量为 $v_2 = (2, 1, 1)$ 。 又

$$(r_1 - r_2, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

故 l_1 和 l_2 异面。 (3 分)

(2) l_1 上的任一点 $P_1 = r_1 + t_1 v_1$ 与 l_2 上的任一点 $P_2 = r_2 + t_2 v_2$ 的连线的方向向量为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_2} &= r_2 - r_1 + t_2 v_2 - t_1 v_1 \\ &= (-2 + 2t_2 - t_1, -4 + t_2 - 2t_1, 2 + t_2 - 2t_1). \end{aligned}$$

$$\text{公垂线的方向向量为 } v = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 3, -3)$$

由 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 与 v 平行:
 $(-5 + 7t_2 - t_1) : (-4 - 6t_2 + 2t_1) : (-9 + t_2 - t_1) = 0 : 3 : -3$

得 $t_1 = 0, t_2 = 1$, 故点 $r_1 + 0v_1 = (1, 3, -3)$ 在公垂线上, 从而公垂线的标准方程为

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+3}{-3}. \quad (9 \text{ 分})$$

(3) $P_1 = r_1 + t_1 v_1$ 与 $P_2 = r_2 + t_2 v_2$ 的中点为

$$\frac{1}{2}(0 + t_1 + 2t_2, 2 + 2t_1 + t_2, -4 + 2t_1 + t_2),$$

因此中点轨迹为一个平面, 平面的法向量为

$$v = v_1 \times v_2 = (0, 3, -3).$$

又点 $\frac{1}{2}(0, 2, -4)$ 在平面上, 故轨迹的方程为 $y - z - 3 = 0$. (15 分)

阅卷人	
得 分	

二、(12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导函数

并且 $f(a) = 0$, 证明: $\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx$.

证明: 令 $g(x) = \int_a^x |f'(t)|dt$, $a \leq x \leq b$ 则 $g'(x) = |f'(x)|$.

由 $f(a) = 0$ 可知

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| = \left| \int_a^x f'(t)dt \right| \leq \int_a^x |f'(t)|dt = g(x). \quad (3 \text{ 分})$$

因此

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leq \int_a^b g(x)g'(x)dx = \frac{1}{2}g^2(x)|_a^b = \frac{1}{2} \left(\int_a^b |f'(x)|dx \right)^2 \quad (7 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_a^b 1 \cdot |f'(x)|dx \right)^2$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_a^b 1^2 dx \int_a^b |f'(x)|^2 dx = \frac{b-a}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx. \quad (12 \text{ 分})$$

阅卷人	
得 分	

三、(13 分) 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-2}$ 条件收敛并求其和。

证明: 已知该级数为交错级数并且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3n-2} = 0$, 有莱布尼兹判别法知该

级数收敛。 (2 分)

又因为 $\frac{1}{3n-2} > \frac{1}{3n}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n-2} > \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} > \frac{1}{3} \ln n \text{ 发散。} \quad (4 \text{ 分})$$

令 $f(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$, 则 $f(x)$ 的收敛域为 $(-1, 1]$.

$$f'(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots = \frac{1}{1+x^3}. \quad (7 \text{ 分})$$

由于 $f(0) = 0$, 因此 $f(x) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^3}dt = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

由阿贝尔方法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-2} = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. (13 分)

学 校
姓 名

阅卷人	
得 分	

四、(13 分) 设 $u = f(z)$ ，其中 z 为方程式 $z = x + y\varphi(z)$

所定义的为变量 x 和 y 的隐函数. 试证:

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ [\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\}.$$

证: 数学归纳法.

当 $n=1$ 时

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z) z'_y,$$

隐函数求导可得

$$z'_y = \frac{\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)},$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z) z'_y = \frac{f'(z)\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)},$$

同理

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(z) z'_x = \frac{f'(z)}{1 - y\varphi'(z)}$$

因此有 $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x}$, 即当 $n=1$ 命题成立. (5 分)

假设对 $n-1$ 结论成立, 对 n 的情况,

$$\text{左侧} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial y^{n-1}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^{n-2} u}{\partial x^{n-2}} \left\{ [\varphi(z)]^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$$

$$= \frac{\partial^{n-2} u}{\partial x^{n-2}} \left\{ (n-1) [\varphi(z)]^{n-2} \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + [\varphi(z)]^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\}, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{右侧} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ [\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ [\varphi(z)]^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right\}$$

$$= \frac{\partial^{n-2} u}{\partial x^{n-2}} \left\{ (n-1) [\varphi(z)]^{n-2} \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + [\varphi(z)]^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\}$$

由于 $z'_y = \varphi(z) z'_x$ 及 (1) 式有 $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x}$,

结论得证. (13 分)

阅卷人	
得 分	

五、(12 分) 设 $F(r) = \int_0^{2\pi} e^{r \cos \theta} \cos(r \sin \theta) d\theta$, $r \in R$.

求证: $F(r) \equiv 2\pi$.

证: 由于 $F(0) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, 只需证明 $F(r)$ 为常数.

$$\begin{aligned} F'(r) &= \int_0^{2\pi} [e^{r \cos \theta} \cos(r \sin \theta)]' d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{r \cos \theta} \cos(\theta + r \sin \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

于是

$$F''(r) = \int_0^{2\pi} e^{r \cos \theta} \cos(2\theta + r \sin \theta) d\theta \quad (4 \text{ 分})$$

数学归纳法易证

$$F^{(n)}(r) = \int_0^{2\pi} e^{r \cos \theta} \cos(n\theta + r \sin \theta) d\theta \quad (6 \text{ 分})$$

对 $n=1, 2, \dots$

于是有

$$F^{(n)}(0) = 0. \quad (8 \text{ 分})$$

由 Taylor 公式, $F(r) = F(0) + F'(0)r + \dots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} r^{n-1} + \frac{F^{(n)}(\theta_1 r)}{n!} r^n$

$$= \frac{F^{(n)}(\theta_1 r)}{n!} r^n \quad (0 < \theta_1 < 1).$$

由 (2) 式

$$|F^{(n)}(\theta_1 r)| \leq 2\pi e^r,$$

$$\left| \frac{F^{(n)}(\theta_1 r) r^n}{n!} \right| \leq \frac{2\pi e^r r^n}{n!} \quad (n \rightarrow \infty), \text{ 故 } F(r) \equiv F(0) = 2\pi. \quad (12 \text{ 分})$$

学 校
姓 名

阅卷人	
得 分	

六、(15 分) 设 V_1, V_2 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的二个子空间，
且 $\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V) = n$. 试证：必存在一个线性变
换 σ ，使得 $\text{Im}(\sigma) = V_2, \text{Ker}(\sigma) = V_1$.

证明：令 $\dim V_1 = r$, 则 $\dim V_2 = n - r$, 于是设

$$V_1 = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r), V_2 = L(\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n),$$

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, $\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n$ 也线性无关.

由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 扩展为 V 的一个基:

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n, \tag{3 分}$$

对 V 中 n 个向量

$$0, \cdots, 0, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_n,$$

必有一个线性变换 σ , 使

$$\sigma(\alpha_i) = \begin{cases} 0, i = 1, \cdots, r; \\ \beta_i, i = r + 1, \cdots, n. \end{cases} \tag{9 分}$$

下证: $V_2 = \text{Im}(\sigma), V_1 = \text{Ker}(\sigma)$.

事实上,

$$\begin{aligned} \text{Im}(\sigma) &= \sigma(L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n)) \\ &= L(\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_r), \sigma(\alpha_{r+1}), \cdots, \sigma(\alpha_n)) \\ &= L(\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n) = V_2 \end{aligned}$$

又

$$\forall \alpha \in V_1 = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r), \quad \alpha = \sum_{i=1}^r k_i \alpha_i,$$

$$\sigma(\alpha) = \sigma\left(\sum_{i=1}^r k_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^r k_i \sigma(\alpha_i) = 0,$$

即得 $\alpha \in \text{Ker}(\sigma)$. 进而 $V_1 \subseteq \text{Ker}(\sigma)$. 又因为

$$\dim \text{Ker}(\sigma) = n - \dim \text{Im}(\sigma) = n - (n - r) = r = \dim V_1$$

因此 $\text{Ker}(\sigma) = V_1$. (15 分)

学	校
姓	名

阅卷人	
得 分	

七、(20 分) 设 σ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 上的线性变换. 如果 σ 的矩阵可以对角化, 则对 σ 的任意一个不变子空间 M , 证明 (1) $\sigma|_M$ 的矩阵也可以对角化.

(2) 存在 σ 的不变子空间 N , 使得 $V = M \oplus N$.

证: (1) 若 $M = (0)$ 或者 V , 则结论显然成立.

下设 M 为 V 的真的非平凡子空间. 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 为 σ 的所有互不相同的特征值.

由于 σ 可以对角化, 则

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$$

这里 V_{λ_i} 是 σ 的属于特征值 λ_i 的特征子空间. (3 分)

令 $M_i = M \cap V_{\lambda_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), 下证 $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k$,

首先证明 $M = M_1 + M_2 + \dots + M_k$. 显然 $M_1 + M_2 + \dots + M_k \subset M$, 反之, 任给 $\alpha \in M$, 由于 $\alpha \in V$,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \quad (\alpha_i \in V_{\lambda_i}),$$

$$\sigma\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_k\alpha_k$$

$\vdots$

$$\sigma^{k-1}\alpha = \lambda_1^{k-1}\alpha_1 + \lambda_2^{k-1}\alpha_2 + \dots + \lambda_k^{k-1}\alpha_k$$

上述方程组的系数矩阵为范德蒙行列式, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 互不相同, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 可

由 $\alpha, \sigma\alpha, \dots, \sigma^{k-1}\alpha$ 线性表出, 由于 $\alpha, \sigma\alpha, \dots, \sigma^{k-1}\alpha \in M$, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in M$.

因此 $\alpha_i \in M_i = M \cap V_{\lambda_i}$, 故 $M = M_1 + M_2 + \dots + M_k$. (7 分)

其次证明 $M = M_1 + M_2 + \dots + M_k$ 为直和. 只需证明 0 向量分解唯一,

设 $0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$, 这里 $\alpha_i \in M_i$. 由于 $M_i \subset V_{\lambda_i}$, 故 $\alpha_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$).

因此 $M = M_1 + M_2 + \dots + M_k$ 为直和.

在 M_i 中取一组基, 由于 $M_i \subset V_{\lambda_i}$, 此组基由 σ 的特征向量构成, 它们合并为 M 的一组基, 从而在此组基下, $\sigma|_M$ 的矩阵可对角化. (10 分)

(2) 若 $M = (0)$ 或者 V , 则结论显然成立.

令 $M_i = M \cap V_{\lambda_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), 由 (1) 的证明知, $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k$.

令 $V_{\lambda_i} = M_i \oplus N_i$, 则 $\sum_{i=1}^k N_i$ 是直和, 令 $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$, 对

任意的 $\alpha \in N_i \subset V_{\lambda_i}$, $\sigma(\alpha) = \lambda_i\alpha \in N_i$, 因此 N_i 为 σ 的不变子

空间, 从而 N 为 σ 的不变子空间, 显然 $V = M + N$. (15 分)

下证 $M + N$ 为直和, 设 $0 = \alpha + \beta$, 这里 $\alpha \in M$, $\beta \in N$.

则存在 $\alpha_i \in M_i$, $\beta_i \in N_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 使得 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$,

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k, \quad \text{因此 } 0 = \alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \dots + (\alpha_k + \beta_k),$$

由于 $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$, 故 $\alpha_i + \beta_i = 0$, 而 $M_i + N_i$ 为直和,

故 $\alpha_i = \beta_i = 0$, 从而 $\alpha = \beta = 0$,

故 $M + N$ 为直和, 证毕. (20 分)