

大连市第二十九届高等数学竞赛试题 (A)

参考答案及评分标准

一、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 总计 20 分)

1、 6 ; 2、 2 ; 3、 -1 ; 4、 $\frac{2\ln 2 - 1}{2}$; 5、 $\frac{1}{2}$;

6、 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy$; 7、 $\frac{\pi}{4 - \pi}$; 8、 $-dx$;

9、 $30a$; 10、 $(-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$

二、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域具有二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$, 试求 $f(0)$,

$f'(0)$ 及 $f''(0)$.

解: (1) 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$, 可得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]}{x} = 3$,

进而 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 进而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$3 分

(2) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 5 分

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]}{x} = 3$, 由等价无穷小得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} = 3$,

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = 2$,8 分

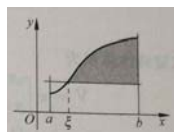
于是 $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 4$10 分

(方法二: 或由泰勒公式得 $f(x) = \frac{1}{2} f''(0) x^2 + 0(x^2)(x \rightarrow 0)$,

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} f''(0) + \frac{0(x^2)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$, 则 $f''(0) = 4$.)

三、(本题 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f(a) > 0$, $f'(x) > 0$, 求证: 存在唯一的 $\xi \in (a, b)$, 使得由 $y = f(x)$, $x = b$, $y = f(\xi)$ 所围的图形的面积与 $y = f(x)$, $x = a$, $y = f(\xi)$ 所围的图形的面积之比为 2021.

证明: 因为 $f'(x) > 0$, 所以 $y = f(x)$ 的图形在 $[a, b]$ 上严格增加, 如左图所示, 围起来的两块图形的面积分别为



$$\int_a^{\xi} [f(\xi) - f(x)] dx \text{ 和 } \int_{\xi}^b [f(x) - f(\xi)] dx$$

做辅助函数

$$F(x) = \int_x^b [f(t) - f(x)] dt - 2021 \int_a^x [f(x) - f(t)] dt, \quad a \leq x \leq b, \quad \cdots 3 \text{ 分}$$

则

$$F(a) = \int_a^b [f(t) - f(a)] dt > 0 \quad (\text{因 } f(t) > f(a))$$

$$F(b) = -2021 \int_a^b [f(b) - f(t)] dt < 0 \quad (\text{因 } f(t) < f(b))$$

因为 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 应用零点定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即

$$\int_{\xi}^b [f(t) - f(\xi)] dt = 2021 \int_a^{\xi} [f(\xi) - f(t)] dt. \quad \cdots \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

$$\text{由于 } F(x) = \int_x^b f(t) dt - f(x)(b-x) - 2021 f(x)(x-a) + 2021 \int_a^x f(t) dt,$$

$$\text{所以 } F'(x) = -f(x) - f'(x)(b-x) + f(x) - 2021 f'(x)(x-a) - 2021 f(x) + 2021 f(x)$$

$$= -f'(x)[(b-x) + 2021(x-a)] < 0.$$

所以 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格减少, 于是上述应用零点定理的 ξ 是唯一的.8 分

四、(本题 8 分) 计算积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \sin x} dx$.

解: 由 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$ 得:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{x}{1 + \sin x} - \frac{x}{1 - \sin x} \right] dx \quad \cdots \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx \quad \cdots \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \, d \sec x \\
&= -2 \left[x \sec x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx \right] \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi + 2 \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi + 2 \ln(\sqrt{2} + 1) \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}
\end{aligned}$$

五、(本题 10 分) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$,

证明: (1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$; (2) 存在 $\eta \in (-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证明: (1) 由于 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(0)=0$2 分

由于 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 由拉格朗日定理, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由于 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f'(x)$ 为偶函数.

由 (1) 可知存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$, 且 $f'(-\xi)=1$7 分

令 $\varphi(x) = e^x (f'(x)-1)$, 由条件显然可知 $\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导, 且 $\varphi(-\xi) = \varphi(\xi) = 0$.

由罗尔定理可知, 存在 $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1,1)$, 使得 $\varphi'(\eta)=0$, 即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

.....10 分

六、(本题 10 分) 设 $x > 0, y > 0, z > 0$, 求 $\ln x + \ln y + 3 \ln z$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ ($r > 0$

为常数) 下的极大值, 并证明: 当 $a > 0, b > 0, c > 0$ 时, 下述不等式成立:

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5.$$

解: 设 $F(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z = \ln(xyz^3)$

做辅助函数 $f(x, y, z, \lambda) = \ln x + \ln y + 3 \ln z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 5r^2)$,2 分

则

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{z} + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2 \end{cases}$$

解得 $\lambda = -\frac{1}{2r^2}, x = y = r, z = \sqrt{3}r$ 为唯一驻点,

故 $F(x, y, z)$ 在 $(r, r, \sqrt{3}r)$ 有极大值.5 分

所以 $F(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z = \ln(xyz^3) \leq \ln(3\sqrt{3}r^5)$,7 分

即 $xyz^3 \leq 3\sqrt{3}r^5$,

则 $(xyz^3)^2 \leq 27(r^2)^5$,

则 $x^2 y^2 z^6 \leq 27 \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5} \right)^5$.

取 $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ 有 $abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5$10 分

七、(本题 8 分) 设 $f(x)$ 连续, $f(0)=1$, V_t 由 $0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq t^2$ 确定, 求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$,

其中 $F(t) = \iiint_{V_t} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dx dy dz$.

解: 记 $D: x^2 + y^2 \leq t^2$, 则

$$\begin{aligned}
F(t) &= \iiint_{V_t} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dx dy dz \\
&= \iint_D dx dy \int_0^1 z^2 dz + \iint_D dx dy \int_0^1 f(x^2 + y^2) dz \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \pi^2 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho$$

$$\underline{\underline{\text{令 } \rho^2 = u}} \quad \frac{1}{3} \pi^2 + \pi \int_0^t f(u) du, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2} &= \frac{\pi}{3} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\pi \int_0^{t^2} f(u) du}{t^2} \\ &= \frac{\pi}{3} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\pi 2t f(t^2)}{2t} \\ &= \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi\end{aligned}\quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

八、(本题 8 分) 设 $a_n > 0$ ($n=1,2,3,\dots$), 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明: 对任意 $r > 0$ (r 为

常数), 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n^{1+r}}$ 收敛, 其中 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

证明: 由于 $a_n > 0$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n^{1+r}}$ 均为正项级数.

由柯西不等式可知,

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq n^2, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \frac{n^2}{S_n},$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 故存在 $a > 0$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = a$.

$$\text{从而 } \frac{n^2}{S_n} \leq a, \text{ 即 } S_n \geq \frac{n^2}{a}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{于是 } \frac{n}{S_n^{1+r}} \leq a^{1+r} \frac{n}{n^{2(1+r)}} = \frac{a^{1+r}}{n^{1+2r}}.$$

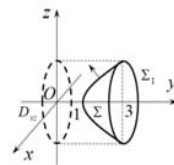
因为对任意 $r > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2r}}$ 都收敛, 所以由比较判别法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n^{1+r}}$ 收敛. \dots\dots\dots 8 分

九、(本题 10 分) 求 $\iint_{\Sigma} (8y+1)xdydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy$, 其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{y-1}, \\ x = 0 \end{cases}$

($1 \leq y \leq 3$) 绕 y 轴旋转一周所成的曲面, 它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

解:

容易求得, 旋转曲面 Σ 的方程为 $y = x^2 + z^2 + 1$. 如图所示,



由于现有曲面不封闭, 需要添加辅助面使其封闭.

添加平面 $\Sigma_1: y = 3$, 方向向右. Σ_1 向 xOz 面的投影区域为

$$D_{\Sigma_1} = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 \leq 2\}.$$

设 Σ, Σ_1 所围成区域为 Ω , 则

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} (8y+1)xdydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy \\ &= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} (8y+1)xdydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy \\ &\quad - \iint_{\Sigma_1} (8y+1)xdydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy\end{aligned}\quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

由高斯公式可得,

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} (8y+1)xdydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy \\ &= \iiint_{\Omega} (8y+1-4y-4y)dV = \iiint_{\Omega} dV \\ &= \int_1^3 dy \iint_{x^2+z^2 \leq y-1} dxdz \\ &= \pi \int_1^3 (y-1)dy = 2\pi.\end{aligned}\quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

此外, 不难求得,

$$\iint_{\Sigma_1} (8y+1)xdydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy$$

$$= \iint_{D_{xz}} 2(1-3^2) dz dx = -32\pi .$$

于是,

$$\iiint_{\Sigma} (8y+1)xdydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy = 2\pi - (-32\pi) = 34\pi . \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

十、(本题 8 分) 设 $u_n(x)$ 满足 $u'_n(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x$ ($n=1,2,\cdots$), 且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$,

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数.

解: 由 $u'_n(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x$, 即 $u'_n(x) - u_n(x) = x^{n-1}e^x$ 得

$$u_n(x) = \left(\int x^{n-1}e^x \cdot e^{\int -1dx} dx + C \right) e^{-\int -dx}$$

$$= e^x \left(\frac{x^n}{n} + C \right) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由 } u_n(1) = \frac{e}{n} \text{ 得 } C = 0 ,$$

$$\text{于是 } u_n(x) = \frac{x^n}{n} e^x . \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{故 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} e^x = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -e^x \ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1) . \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$