

学 校
姓 名
考 号

大连市第二十九届高等数学竞赛试题 (A)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

考生注意： 考试时间 150 分钟 试卷总分 100 分

阅卷人	
得 分	

一、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 总计 20 分)

- 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____.
- 已知 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1} =$ _____.
- 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{x+y} - x = xy + 1$ 所确定, 则 $y''(0) =$ _____.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] =$ _____.
- 已知函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f''(t) dt$ 的导数 $F'(x)$ 与 x^2 为等价无穷小, 则 $f''(0) =$ _____.
- 将二重积分 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y) dx$ 交换积分次序后可以写为: _____.
- 若函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.
- 若函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 确定, 则 $dz \Big|_{(0,1)} =$ _____.
- 若 L 为曲线 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的边界, 其周长为 a , 则 $\oint_L (5x^2 + 6y^2) ds =$ _____.
- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{1+x} \right)^n$ 的收敛域为 _____.

阅卷人	
得 分	

二、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域具有二阶导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3, \text{ 试求 } f(0), f'(0) \text{ 及 } f''(0).$$

阅卷人	
得 分	

三、(本题 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f(a) > 0$, $f'(x) > 0$, 求证: 存在

唯一的 $\xi \in (a,b)$, 使得由 $y = f(x)$, $x = b$, $y = f(\xi)$ 所围的图形的面积与 $y = f(x)$, $x = a$, $y = f(\xi)$ 所围的图形的面积之比为 2021.

学	校
姓	名
考	号

阅卷人	
得 分	

四、(本题 8 分) 计算积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin x} dx$.

阅卷人	
得 分	

五、(本题 10 分) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数,

- 且 $f(1)=1$, 证明: (1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;
(2) 存在 $\eta \in (-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

阅卷人	
得 分	

六、(本题 10 分) 设 $x>0, y>0, z>0$, 求 $\ln x+\ln y+3 \ln z$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=5 r^2$ ($r>0$ 为常数) 下的极大值, 并证明: 当 $a>0, b>0, c>0$ 时, 下述不等式成立:

$$abc^3 \leq 27(\frac{a+b+c}{5})^5.$$

学	校
姓	名
考	号

阅卷人	
得 分	

七、(本题 8 分) 设 $f(x)$ 连续, $f(0)=1$, V_t 由 $0 \leq z \leq 1$,

$x^2+y^2 \leq t^2$ 确定, 求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$, 其中

$$F(t)=\iiint_{V_t}[z^2+f(x^2+y^2)]dxdydz.$$

阅卷人	
得 分	

八、(本题 8 分) 设 $a_n > 0$ ($n=1,2,3,\cdots$), 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛,

证明: 对任意 $r > 0$ (r 为常数), 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n^{1+r}}$ 收敛, 其中 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

学	校
姓	名
考	号

阅卷人	
得 分	

九、(本题 10 分)求 $\iiint_{\Sigma}(8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$,

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1}, \\ x=0 \end{cases}$ ($1\leq y\leq 3$) 绕 y 轴旋转一周所成的曲面, 它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

阅卷人	
得 分	

十、(本题 8 分) 设 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$ ($n=1,2,\cdots$), 且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$,

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数.