

大连市第二十九届高等数学竞赛试题 (B)

参考答案及评分标准

一、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 总计 20 分)

1、 $\frac{1}{2020}$; 2、 $\frac{\pi}{2}$; 3、 $e^{\cot a}$; 4、 -1 ; 5、 3 , 6、 $y=x$;

7、 1 ; 8、 1 ; 9、 $\frac{8}{3}$; 10、 $\frac{e^x}{x+2}+C$

二、(本题 8 分) 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^3} - 1)[t - \ln(1 + \tan t)] dt}{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}$

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^3} - 1)[x - \ln(1 + \tan x)]}{2x \sin x^4}$ 2 分

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 [x - \ln(1 + \tan x)]}{2x^5}$ 2 分

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{2x^2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x}}{4x}$ 1 分

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan^2 x}{4x(1 + \tan x)}$ 1 分

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \tan x)}{4x(1 + \tan x)} = \frac{1}{4}$ 2 分

三、(本题 8 分) 计算极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^3 \right]^{\frac{1}{n}}$

解: 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[3 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 3 \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + 3 \ln \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]$ 1 分

$= 3 \int_0^1 \ln(1+x) dx$ 2 分

$= 3 \left[x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x d \ln(1+x) \right]$ 1 分

$= 3 \left[\ln 2 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \right]$

$= 3 \left[\ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx \right]$ 2 分

$= 3 \left[\ln 2 - (x - \ln(1+x)) \Big|_0^1 \right] = 3(2 \ln 2 - 1)$ 2 分

四、(本题 8 分)

设 $f(x)$ 为连续函数, $\varphi(x) = \int_0^{\sin x} f(tx^2) dt$, 且 $f(0) = 2$, 讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性

解: $x \neq 0$ 时, 令 $u = tx^2$, $\varphi(x) = \int_0^{x^2 \sin x} \frac{1}{x^2} f(u) du = \frac{\int_0^{x^2 \sin x} f(u) du}{x^2}$ 1 分

$\varphi'(x) = \frac{x^2 f(x^2 \sin x)(2x \sin x + x^2 \cos x) - 2x \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du}{x^4}$

$= \frac{f(x^2 \sin x)(2x \sin x + x^2 \cos x)}{x^2} - \frac{2 \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du}{x^3}$

.....2 分

而 $\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2 \sin x} f(u) du}{x^3}$ 1 分

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 \sin x)(2x \sin x + x^2 \cos x)}{3x^2} = f(0) \cdot 1 = 2$ 2 分

$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 \sin x)(2x \sin x + x^2 \cos x)}{x^2} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2 \sin x} f(u) du}{x^3}$

$$=3f(0)-2f(0)=2=\varphi'(0)$$

所以 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续2 分

五、(本题 8 分)

设 $f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上单调递减的连续函数. 证明: $\forall x \geq 0, \int_0^x (x^2 - 3t^2)f(t)dt \geq 0$

证明: 令 $F(x) = \int_0^x (x^2 - 3t^2)f(t)dt$, 则 $F(0) = 0$, 且1 分

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[x^2 \int_0^x f(t)dt - \int_0^x 3t^2 f(t)dt \right] \\ &= 2x \int_0^x f(t)dt + x^2 f(x) - 3x^2 f(x) \\ &= 2x \int_0^x f(t)dt - 2x^2 f(x) \\ &= 2x^2 f(\xi) - 2x^2 f(x) \\ &= 2x^2 (f(\xi) - f(x)) \quad \xi \in (0, x) \end{aligned}$$

.....3 分

因为 $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(\xi) \geq f(x)$, 从而 $F'(x) \geq 0$, 所以 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加,

$$F(x) \geq F(0), \text{ 即 } \int_0^x (x^2 - 3t^2)f(t)dt \geq 0. \quad \text{.....2 分}$$

六、(本题 8 分) 计算定积分 $\int_0^\pi \frac{\pi + \cos x}{x^2 - \pi x + 2021} dx$

$$\text{解: 原式} = \int_0^\pi \frac{\pi + \cos x}{(x - \frac{\pi}{2})^2 + 2021 - \frac{\pi^2}{4}} dx \quad \text{.....1 分}$$

$$\text{令 } x - \frac{\pi}{2} = t,$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{\pi + \cos x}{(x - \frac{\pi}{2})^2 + 2021 - \frac{\pi^2}{4}} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - \sin t}{t^2 + a^2} dt, \quad a = \sqrt{2021 - \frac{\pi^2}{4}} \end{aligned} \quad \text{.....2 分}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{t^2 + a^2} dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^2 + a^2} dt, \quad \text{.....2 分}$$

$$= \frac{2\pi}{a} \arctan \frac{t}{a} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{.....2 分}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2021 - \frac{\pi^2}{4}}} \arctan \frac{\pi}{2\sqrt{2021 - \frac{\pi^2}{4}}} \quad \text{.....1 分}$$

七、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$, 已知 $f(1) = 1$,

求 $\int_1^2 f(x)dx$ 的值

解: 令 $u = 2x - t$, 则 $du = -dt$

$$\int_0^x tf(2x-t)dt = -\int_{2x}^x (2x-u)f(u)du = 2x \int_x^{2x} f(u)du - \int_x^{2x} uf(u)du$$

$$2x \int_x^{2x} f(u)du - \int_x^{2x} uf(u)du = \frac{1}{2} \arctan x^2 \quad \text{.....3 分}$$

两端对 x 求导得

$$2 \int_x^{2x} f(u)du + 2x[2f(2x) - f(x)] - [2xf(2x) \cdot 2 - xf'(x)] = \frac{x}{1+x^4} \quad \text{.....3 分}$$

$$\text{即 } 2 \int_x^{2x} f(u)du = \frac{x}{1+x^4} + xf'(x) \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{令 } x=1 \text{ 得 } 2 \int_1^2 f(u)du = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{故 } \int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{4} \quad \text{.....2 分}$$

八、(本题 10 分) 证明方程 $x^n + nx = 1$ (其中 $n > 1$ 为正整数) 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅

有一个实根 a_n , 并计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n$

解: 令 $f(x) = x^n + nx - 1$, $f(0) = -1 < 0$ 1 分

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n + n \cdot \frac{1}{n} - 1 = \left(\frac{1}{n}\right)^n > 0$$

由零点定理, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{n})$ 上存在零点 a_n ,1 分

又因为 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) = nx^{n-1} + n > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$f(x) = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内至多有一个实根

故 $f(x)=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个实根 a_n :2 分

因为 $0 < a_n < \frac{1}{n}$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{.....2 分}$$

而 $0 < a_n^n < \frac{1}{n^n}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 0$

a_n 为方程的根, 故 $a_n^n + na_n = 1, \quad na_n = 1 - a_n^n,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 1 - 0 = 1 \quad \text{.....2 分}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln(1 + a_n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + a_n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} na_n} = e \quad \text{.....2 分}$$

九、(本题 10 分) 求正数 a , 使得曲线 $y = a(1 - x^2)$ 在点 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 处的法线与曲线所围成的图形面积最小

解: $y' = -2ax, y'|_{x=1} = -2a$ 1 分

曲线在 $(1,0)$ 处的法线方程为 $y = \frac{1}{2a}(x-1)$ 2 分

由所围成图形的对称性, 面积 $S = 2 \int_0^1 \left[a(1 - x^2) - \frac{1}{2a}(x-1) \right] dx = 2 \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{4a} \right)$ 4 分

$$S'(a) = 2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4a^2} \right) = 0, \text{ 因为 } a > 0, \text{ 所以驻点 } a = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ 且 } S''\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) > 0 \quad \text{.....2 分}$$

此唯一驻点为最小值点, 所以当 $a = \frac{\sqrt{6}}{4}$ 时所围成的图形面积最小1 分

十、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导, 且 $f(2) = 5f(0)$,

证明: $\exists \xi \in (0,2)$, 使 $(1 + \xi^2)f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$

证明: 设 $F(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$, $F(x)$ 在 $[0,2]$ 内连续, 在 $(0,2)$ 内可导,4 分

且 $F(0) = f(0)$, $F(2) = \frac{f(2)}{5} = f(0)$ 2 分

即 $F(0) = F(2)$, 由罗尔定理, $\exists \xi \in (0,2)$, 使 $F'(\xi) = 0$,

$$\text{即 } F'(\xi) = \frac{(1+\xi^2)f'(\xi) - 2\xi f(\xi)}{(1+\xi^2)^2} = 0$$

则有 $(1+\xi^2)f'(\xi) - 2\xi f(\xi) = 0$ 3 分

即

$$(1+\xi^2)f'(\xi) = 2\xi f(\xi) \quad \text{.....1 分}$$