

大连市第二十九届高等数学竞赛试题（B）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

考生注意： 考试时间 150 分钟 试卷总分 100 分

学 校
姓 名
考 号

阅卷人	
得 分	

一、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，总计 20 分）

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (2020^{-n} + 2021^{-n})^{\frac{1}{n}} =$ _____
- $\int_{-1}^1 (x^2 \sin x + \sqrt{1-x^2}) dx =$ _____
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} (a \neq 0) =$ _____
- 已知函数 $f(x)$ 满足 $f'(0)=1$ 且 $f(0)=0$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)-2f(x^2)}{x^2} =$ _____
- 函数 $y=f(x)$ 连续， $\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)dt$ ， $\varphi(1)=1$ ， $\varphi'(1)=7$ ，则 $f(1)=$ _____
- 曲线 $y=x+\sin \frac{1}{x}$ 的斜渐近线为 _____
- 已知 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n+1}{n}\right) =$ _____
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \right] =$ _____
- $\int_{-2}^2 x \ln(1+e^x) dx =$ _____
- $\int \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} dx =$ _____

阅卷人	
得 分	

二、（本题 8 分）求极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^3}-1)[t-\ln(1+\tan t)] dt}{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}$

阅卷人	
得 分	

三、（本题 8 分）求极限： $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \left(1+\frac{2}{n}\right)^3 \cdots \left(1+\frac{n}{n}\right)^3 \right]^{\frac{1}{n}}$

学 校
姓 名
考 号

阅卷人	
得 分	

四、（本题 8 分）设 $f(x)$ 为连续函数， $\varphi(x)=\int_0^{\sin x} f(tx^2)dt$ ，且 $f(0)=2$ ，讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性

阅卷人	
得 分	

五、（本题 8 分） $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上单调递减的连续函数，

证明： $\forall x \geq 0, \int_0^x (x^2-3t^2)f(t)dt \geq 0$

阅卷人	
得 分	

六、（本题 8 分）计算定积分 $\int_0^{\pi} \frac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+2021}dx$

学	校
姓	名
考	号

阅卷人	
得 分	

七、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2}\arctan x^2$,

已知 $f(1)=1$, 求 $\int_1^2 f(x)dx$ 的值

阅卷人	
得 分	

八、(本题 10 分) 证明方程 $x^n + nx = 1$ (其中 $n > 1$ 为正整数) 在区间 $(0, +\infty)$ 内有

且仅有一个实根 a_n , 并计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n$

学	校
姓	名
考	号

阅卷人	
得 分	

九、(本题 10 分) 求正数 a ，使得曲线 $y=a(1-x^2)$ 在点 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 处的法线与曲线所围成的图形面积最小

阅卷人	
得 分	

十、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(2)=5f(0)$ ，
证明： $\exists \xi \in (0,2)$ ，使 $(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$