

大连市第三十届高等数学竞赛试卷(数学专业)答案

一、(10分) 设函数 $f(x)$ 是连续的周期函数, 且不是常函数。证明: $f(x)$ 有最小正周期。

证明: 记 $E = \{T > 0 : T \text{ 是 } f(x) \text{ 的正周期}\}$, 则 E 是非空有下界的集合, 因此有下确界, 记为 $T_0 = \inf E$. 下面证明 T_0 是 $f(x)$ 的最小正周期。

..... 3分

先证 $T_0 > 0$ 。显然 $T_0 \geq 0$, 因此可以用反证法证明。若 $T_0 = 0$, 由下确界的定义, 存在 $T_n \in E$, 使得 $0 < T_n < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ 。对任意给定的 $y > x$, 记 $y - x = k_n T_n + r_n$, 其中 k_n 是整数, $r_n \in [0, T_n)$, 因此有 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. 由于有

$$f(y) = f(x + k_n T_n + r_n) = f(x + r_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 注意到 f 的连续性可知有 $f(y) = f(x)$ 。由 x, y 的任意性可知 $f(x)$ 是常函数, 矛盾。因此 $T_0 > 0$ 。

..... 4分

再证明 T_0 是周期。仍然由下确界的定义, 存在 $T_n \in E$, 使得 $T_0 \leq T_n < T_0 + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ 。于是对任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + T_0) = f(x + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = f(x),$$

故 T_0 是周期。综上, T_0 即为 $f(x)$ 的最小正周期。

..... 3分

二、(10分) 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, 求极

限 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} \frac{xy}{x+y}$ 和 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in E}} \frac{xy}{x+y}$, 若存在请证明, 若不存在请说明理由。

解: 极限 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} \frac{xy}{x+y}$ 不存在, 理由如下:

取曲线 $y = -x + kx^2$, 沿此曲线趋于原点 $(0, 0)$ 时有

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} \frac{x(-x + kx^2)}{kx^2} = -\frac{1}{k}$$

与 k 有关, 因此极限不存在。

..... 5分

极限 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in E}} \frac{xy}{x+y} = 0$ 。理由如下:

由Cauchy-Schwarz不等式有 $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, 即 $0 < \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2}$, 由夹逼定理可知极限为0。也可以用其它的不等式放缩, 结果正确即可。

..... 5分

三、(10分) 设 n 是正整数, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是互不相等的实数, $c_1, \dots, c_n$ 是不同时

为0的实数。问 $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x}$ 至多能有多少个实零点?

解: $f(x)$ 至多有 $n - 1$ 个实零点。用数学归纳法证明。

当 $n = 1$ 时, $f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}$ 无零点。

..... 2分

设结论对 $n-1$ 成立, 现考虑对 n 的情况, 若 $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x}$ 有 n 个实根, 不妨记为 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. 注意到 $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x} = e^{\lambda_1 x} \sum_{k=1}^n c_k e^{\mu_k x}$, 这里 $\mu_k = \lambda_k - \lambda_1$, 特别的, $\mu_1 = 0$, 而 $\mu_k \neq 0$ 且互不相同, $2 \leq k \leq n$. 于是 $f(x_k) = 0$ 等价于 $g(x_k) = 0$, 其中 $g(x) = c_1 + \sum_{k=2}^n c_k e^{\mu_k x}$.

..... 4分

由微分学的中值定理, 存在 $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$, 使得 $g'(\xi_i) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$. 注意到 $g'(x) = \sum_{k=2}^n \mu_k c_k e^{\mu_k x}$, 因此 $g'(x) = 0$ 有 $n-1$ 个零点 ξ_i , $1 \leq i \leq n-1$. 由归纳假设, 若 $c_2, \cdots, c_n$ 不全为零, $g'(x) = 0$ 不可能有 $n-1$ 个零点, 因此必有 $c_2 = \cdots = c_n$, 此时 $f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}$ 无零点. 与 $f(x)$ 有 n 个实根矛盾. 因此 $f(x) = 0$ 至多有 $n-1$ 个零点.

..... 4分

四、(10分)求极限 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln h} \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + h^2} dx$. 其中 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续可微, 且 $f(0) = 0$.

解: 分段估计放缩. 首先记 $-M \leq f(x) \leq M$, $x \in [0, 1]$. 对给定的 $\varepsilon > 0$, 由微分的定义, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (0, \delta]$ 时有 $\left| \frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0) \right| < \varepsilon$, 即

$$-\varepsilon x + f'(0)x < f(x) < f'(0)x + \varepsilon x, \quad x \in (0, \delta].$$

..... 4分

于是有

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{h^2 + x^2} dx < \int_0^\delta \frac{f'(0)x + \varepsilon x}{h^2 + x^2} + \int_\delta^1 \frac{f(x)}{x^2 + h^2} \leq \frac{f'(0) + \varepsilon}{2} \ln \frac{h^2 + \delta^2}{h^2} + \int_\delta^1 \frac{M}{\delta^2} dx$$

化简为

$$-\frac{1}{\ln h} \int_0^1 \frac{f(x)}{h^2 + x^2} dx < (f'(0) + \varepsilon) - \frac{1}{\ln h} \frac{f'(0) + \varepsilon}{2} \ln(h^2 + \delta^2) - \frac{M}{\delta^2 \ln h}.$$

注意到 $-\frac{1}{\ln h} \rightarrow 0$, 令 $h \rightarrow 0^+$ 取上极限有

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\ln h} \int_0^1 \frac{f(x)}{h^2 + x^2} dx \leq f'(0) + \varepsilon.$$

..... 4分

类似利用不等式

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{h^2 + x^2} dx > \int_0^\delta \frac{f'(0)x - \varepsilon x}{h^2 + x^2} + \int_\delta^1 \frac{f(x)}{x^2 + h^2} \geq \frac{f'(0) - \varepsilon}{2} \ln \frac{h^2 + \delta^2}{h^2} + \int_\delta^1 \frac{-M}{\delta^2} dx$$

可得

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\ln h} \int_0^1 \frac{f(x)}{h^2 + x^2} dx \geq f'(0) - \varepsilon.$$

然后令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 有

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln h} \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + h^2} dx = -f'(0).$$

..... 2分

五、(10分) 设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ 。

证明: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 由条件以及Cauchy收敛原理知存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 对任意的 $m > n$, 任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $|\sum_{k=n}^m a_k \sin kx| < \varepsilon$ 。

..... 5分

于是利用不等式 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 取 $m = 2n$, $x = \frac{\pi}{4n}$, 有

$$\varepsilon > \sum_{k=n}^{2n} a_k \sin k \frac{\pi}{4n} \geq \sum_{k=n}^{2n} a_k \frac{2k\pi}{4n\pi} \geq \frac{a_{2n}}{2n} \sum_{k=n}^{2n} k = \frac{2na_{2n}}{4}.$$

这说明当 $n \geq N$ 时有 $0 \leq 2na_{2n} < 4\varepsilon$ 。显然有 $0 \leq (2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = 2na_{2n} + a_{2n}$, 由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ 。

..... 5分

六、(15分) 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实对称正定阵。(1) 定义实二次型 $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} A & x \\ x^T & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。证明: f 是负定二次型。(2) 证明: $\det(A) \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ 。这里 $\det$ 是矩阵的行列式。

证明: (1) 显然 A 可逆, 且逆矩阵 A^{-1} 也是对称正定的。注意到

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -x^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & x \\ x^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & -x^T A^{-1} x \end{pmatrix},$$

..... 5分

取行列式有

$$f(x) = \det \begin{pmatrix} A & x \\ x^T & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & -x^T A^{-1} x \end{pmatrix} = -x^T A^{-1} x \cdot \det(A) < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

这说明 f 是负定二次型。

..... 5分

(2) 记 A_{n-1} 是 A 的前 $n-1$ 阶顺序主子阵, 注意 A_{n-1} 是正定阵。并记 $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}$,

由行列式的性质可知

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

由(1)知前者非正, 后者为 $a_{nn} \det(A_{n-1})$, 因此有 $\det(A) \leq a_{nn} \det(A_{n-1})$ 。于是继续递推可得

$$\det(A) \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

当然对结论(2), 也可以直接用数学归纳法证明。

..... 5分

七、(20分) 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 给定, 定义 $\sigma: \mathbb{C}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times m}$ 为 $\sigma(X) = AX - XB, \forall X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 。(1) 证明: σ 为 $\mathbb{C}^{n \times m}$ 上的线性变换; (2) 证明: σ 可逆的充要条件是 A 和 B 没有公共特征值。

证明: (1) 对任意的 $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 任意的 $\alpha \in \mathbb{C}$, 有 $\sigma(X + Y) = A(X + Y) - (X + Y)B = (AX - XB) + (AY - YB) = \sigma(X) + \sigma(Y)$, 以及 $\sigma(\alpha X) = A(\alpha X) - (\alpha X)B = \alpha(AX - XB) = \alpha\sigma(X)$, 因此 σ 是线性变换。

..... 5分

(2) 必要性。若 A 与 B 有公共特征值 λ , 注意 B 与 B^T 的特征值相同, 因此存在非零向量 $x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m$, 使得 $Ax = \lambda x, B^T y = \lambda y$ 。考虑非零矩阵 $X = xy^T$, 此时

$$\sigma(X) = Axy^T - xy^T B = (Ax)y^T - x(B^T y)^T = \lambda xy^T - x(\lambda y)^T = 0,$$

矛盾。因此 A 与 B 无公共特征值。

..... 5分

充分性。先设 $A = J, B^T = R$ 均是 Jordan 块, 即

$$A = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad B^T = R = \begin{pmatrix} \mu & 1 & & \\ & \mu & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{pmatrix}.$$

此时条件意味着 $\lambda \neq \mu$ 。直接计算 $AX - XB = JX - XR^T = 0$, 其中 $X = (x_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 可知 $X = 0$ 。验证顺序为 x_{nm} , X 的最后一行, 然后继续递推即可。由此知道此时 σ 是可逆的。

..... 5分

对一般情形, 存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n \times n}, Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$, 使得

$$P^{-1}AP = J_A = \text{diag}(J_{1A}, \dots, J_{kA}), \quad Q^{-1}B^TQ = R_B = \text{diag}(R_{1B}, \dots, R_{sB}),$$

其中 J_{iA} , R_{jB} 均为 Jordan 块, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq s$ 。注意到

$$AX - XB = PJ_AP^{-1}X - XQ^{-T}R_B^TQ^T = P(J_AY - YR_B^T)Q^T, \quad Y = P^{-1}XQ^{-T}.$$

将 Y 分块 $Y = (Y_{ij})$, 其中 Y_{ij} 的行数与 J_{iA} 阶数相同, 列数与 R_{jB} 的阶数相同, 因此有

$$J_AY - YR_B^T = (J_{iA}Y_{ij} - Y_{ij}R_{jB}^T).$$

若 $\sigma(X) = AX - XB = 0$, 这等价于 $J_AY - YR_B^T = 0$, 而这又等价于 $J_{iA}Y_{ij} - Y_{ij}R_{jB}^T = 0$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq s$ 。由前面已证情形知 $Y_{ij} = 0$, 因此 $Y = 0$, 故 $X = PYQ^T = 0$ 。于是 σ 可逆。综上结论得证。

..... 5分

八、(15分)给定球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z - 20 = 0$, 求以 $(2, 6, 10)$ 为顶点的切锥面的方程。

解: 由球面方程可知该球面的球心为 $D(-1, 2, -2)$, 半径 $r = \sqrt{29}$ 。

已知球面的切锥面为圆锥面, 因为 $A(2, 6, 10)$ 为其顶点, 则对称轴为直线 AD , 对称轴方向向量可取为 $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = (-3, -4, -12)$ 。那么该圆锥面的半顶角 α 满足关系式

$$\sin \alpha = \frac{r}{|\vec{v}|}.$$

..... 5分

设 $P(x, y, z)$ 为所求锥面上一点, 从而所求直圆锥面方程为

$$\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}|}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\vec{v}|} = \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

..... 5分

化简可得方程为

$$131x^2 + 124y^2 - 4z^2 - 24xy - 72xz - 96yz + 340x - 480y + 800z - 2900 = 0.$$

..... 5分