

一、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，总计 20 分）

1、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2023} + 2023}{e^{0.2023x} + 0.2023} (\sin x + 2023) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 0。

2、 $\int_{-\pi}^{2023\pi} (\sin x + \cos^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 759π 。

3、函数 $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ ，则 $f^{(2024)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 4^{2023} 。

4、函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不可导点个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 2。

5、设 D 由曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 与直线 $x = \frac{\pi}{2}$, x 轴所围的平面图形，则 D 绕直线 $x = -1$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 4π 。

6、函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$ 的极小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 -8。

7、函数 $f(x) = x^2$, $0 \leq x < 1$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, $-\infty < x < +\infty$, 其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$ ($n=1, 2, \dots$), 则

$S(-\frac{1}{2}) + S(99) + S(100) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 $-\frac{1}{4}$ 。

8、设平面曲线 $L: |x| + |y| = 1$, 则曲线积分 $\oint_L \frac{(2y + \sin x^2 + \cos y)dx + (3x + e^{y^2} + 5x^2)dy}{|x| + |y|} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 2。

9、设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 则曲面积分 $\oiint_{\Sigma} (x + 2y + 3|z|) dS = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 $4\sqrt{3}$ 。

10、设微分方程 $y'' + by' + y = 0$ 的每个解 $y(x)$ 都在区间 $(0, +\infty)$ 上有界，则实数 b 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 $[0, +\infty)$ 。

二、（本题 10 分）求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t^2 \sin \sqrt{x^2 - t^2} dt}{x^7}$ 。

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{x^2 - t^2} d \frac{t^3}{3}}{x^7}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{t^3}{3} \sin \sqrt{x^2 - t^2} \Big|_0^{x^2} - \int_0^{x^2} \frac{t^3}{3} \cos \sqrt{x^2 - t^2} \frac{-t}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt}{x^7}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^6}{3} \sin \sqrt{x^2 - x^4} + \frac{1}{3} \int_0^{x^2} \frac{t^4}{\sqrt{x^2 - t^2}} \cos \sqrt{x^2 - t^2} dt}{x^7}$$

（4 分）

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^6}{3} \sin \sqrt{x^2 - x^4}}{x^7} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x^2 - x^4}}{x} = \frac{1}{3},$$

$$0 \leq \frac{\frac{1}{3} \int_0^{x^2} \frac{t^4}{\sqrt{x^2 - t^2}} \cos \sqrt{x^2 - t^2} dt}{x^7} \leq \frac{\int_0^{x^2} \frac{t^4}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt}{3x^7},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \frac{t^4}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt}{3x^7} \stackrel{t = x \sin u}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\arcsin x} \sin^4 u du}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{9x^2} = 0,$$

$$\text{原式} = \frac{1}{3}.$$

(10 分)

三、(本题 10 分) 1、证明方程 $x = 2 \ln(1+x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一实根 ξ ;

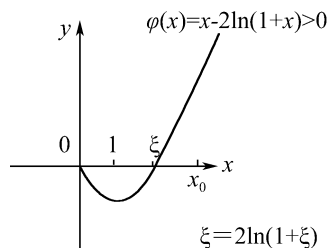
2、任取 $x_1 > \xi$, $x_{n+1} = 2 \ln(1+x_n)$ ($n=1, 2, \dots$), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 。

解: 1、 $\varphi(x) = x - 2 \ln(1+x)$, $x > 0$,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{2}{1+x} = \frac{x-1}{1+x},$$

$$\varphi'(x) = 0, \quad x=1 \quad (\text{唯一}).$$

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
φ'	-	0	+
φ	↘ 0	1-2	↗ +∞



$\Rightarrow \exists$ 唯一 $\xi \in (1, +\infty)$, 使 $\varphi(\xi) = 0$ 。

(4 分)

2、 $x_1 > \xi$, $\xi = 2 \ln(1+\xi) < x_2 = 2 \ln(1+x_1) < x_1$ ($\varphi(x_0) > 0$),

设: $\xi < x_n < x_{n-1} \Rightarrow \xi = 2 \ln(1+\xi) < x_{n+1} = 2 \ln(1+x_n) < x_n$ ($\varphi(x_n) > 0$),

故, $\{x_n\}$ 单调减且有下界。

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 存在, 在 $x_{n+1} = 2 \ln(1+x_n)$ 两边取极限。得 $a = 2 \ln(1+a)$, $a = \xi$ 。(10 分)

四、(本题 10 分) 设定义在 $[0, 1]$ 上的可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) \geq M > 0$, 证明: 存在 $[0, 1]$ 的一个子区间 I ,

其长度为 $\frac{1}{4}$, 对于 $x \in I$, 有 $|f(x)| \geq \frac{1}{4} M$ 。

证 由于 $f'(x) > 0$, 可知 $f(x)$ 单调增加, 应用拉格朗日中值定理, 有 $f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'(\xi) \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{4} M$,

若 $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$, 则区间 $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ 为所求, 在此区间内 $|f(x)| \geq \frac{1}{4}M$ 。(5 分)

若 $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, 则在 $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 上有

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right) = f'(x)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \geq \frac{1}{4}M,$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}M, \quad |f\left(\frac{1}{4}\right)| \geq \frac{1}{4}M,$$

区间 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ 为所求, 在此区间内 $|f(x)| \geq \frac{1}{4}M$ 。(10 分)

五、(本题 8 分) 讨论方程 $2e^{2-x^2}(x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 1) - 2e - 5 = 0$ 根的个数。

解: 令 $x^2 = t$, $f(t) = 2e^{2-t}(t^3 - 3t^2 + 5t - 1) - 2e - 5, t \geq 0$,

$$f'(t) = -2e^{2-t}(t-1)(t-2)(t-3), \quad (4 \text{ 分})$$

$$f'(t) = 0, t = 1, 2, 3.$$

$$\text{由于 } f(0) = -2e^2 - 2e - 5 < 0, f(1) = 2e - 5 > 0, f(2) = 5 - 2e < 0, f(3) = \frac{28}{e} - 2e - 5 < 0,$$

函数 $f(t)$ 有 2 个零点, 即原方程有 4 个根。(8 分)

六、(本题 8 分) 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是正的实数列, 满足 $e^{a_n} = a_n + e^{b_n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 收敛。

解:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{a_n} - a_n)}{a_n^2} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

由比较法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 收敛。(8 分)

七、(本题 8 分) 一个冬天的早晨开始下雪, 且以恒定的速度不停的下。一台扫雪机从上午 8 点开始在公路上扫雪, 到 9 点前进了 2 公里, 到 10 点前进了 3 公里, 假定扫雪机每小时扫去积雪的体积为常数, 且公路的宽度也是常数, 问何时开始下雪?

解：设 T 是开始下雪时刻与 8 点的时间间隔，开始下雪时刻记为 $t=0$ ， $S(t)$ 是 t 时刻扫雪机前进的路程，公路的宽度为 b ，每小时下雪的厚度为 h ，根据扫雪机每小时扫去积雪的体积为常数，有：

$$b \cdot h \cdot t \cdot \frac{ds}{dt} = \text{常数}, \text{ 即} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{k}{t}, \text{ 解得: } S(t) = k \ln t + c,$$

$$\begin{cases} S(T) = k \ln T + c = 0 \\ S(T+1) = k \ln(T+1) + c = 2, \\ S(T+2) = k \ln(T+2) + c = 3 \end{cases}$$

$$T = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618(\text{小时}) \approx 37\text{分}5\text{秒}, \text{ 故 } 8\text{小时}-37\text{分}5\text{秒}=7\text{小时}22\text{分}55\text{秒}。(8 \text{ 分})$$

八、(本题 8 分) 利用变换: $u = x + y, v = x - y, w = xy - z$ 化简方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$,

其中二阶偏导数连续。

$$\text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = y - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \quad (6 \text{ 分})$$

将上述结果代入原方程，经整理后得: $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}。$ (8 分)

九、(本题 8 分) 设 $b > a > 0$ ，计算 $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx。$

$$\text{解: } I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-x^2 y} dy \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx$$

$$\underline{\underline{\sqrt{yx} = t}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{y}} dy \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (6 \text{ 分})$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

$$= \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a})。 \quad (8 \text{ 分})$$

十、(本题 10 分) 一个底半径为 1，高为 6 的开口圆柱形水桶，在距底为 2 处有两个孔，两小孔的连线与水桶的对称轴线相交。问该桶最多能盛多少水？

解：水桶平放时最多盛水 $V = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$ ，欲使盛水量增加，则水桶必须倾斜。建立如图坐标系，A、B 为小孔。显然最佳状态时，水面经过 A(1,0,2)，B(-1,0,2) 与 C(0,1,6) 确定的平面。此平面的方程是

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1-1 & 0 & 2-2 \\ 0-1 & 1-0 & 6-2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } z = 4y + 2. \text{ (5 分)}$$

于是最大盛水量为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ y \geq -\frac{1}{2}}} (4y+2) dx dy = \int_{-\frac{1}{2}}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (4y+2) dx \\ &= 4 \int_{-\frac{1}{2}}^1 (2y+1) \sqrt{1-y^2} dy = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}. \text{ (10 分)} \end{aligned}$$

