

一、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，总计 20 分）

1、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2023} + 2023}{e^{0.2023x} + 0.2023} (\sin x + 2023) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 0。

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 $\ln(1+\sqrt{2})$ 。

3、设函数 $f(x)$ 是周期为 4 的可导的奇函数， $f'(x) = 2(x-1), x \in [0, 2]$ ，则 $f(7) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 1。

4、函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的无穷型间断点的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 1。

5、 $f(0) = 0, f'(0) = 2$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x^3) - x^2 f(x)}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 2。

6、函数 $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ ，则 $f^{(2024)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 4^{2023} 。

7、 $\int_{-\pi}^{2023\pi} (\sin x + \cos^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 759π 。

8、函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不可导点个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 2。

9、设 D 由曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 与直线 $x = \frac{\pi}{2}$, x 轴所围的平面图形，则 D 绕直线 $x = -1$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 4π 。

10、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定，则 $y = y(x)$ 的极小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 答案 1。

二、（本题 8 分）求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$ 。

解：原式 $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{x}}} - 1}{\ln x}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} \cdot (e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)} \cdot e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{\ln x}} = e^{-1}。 \quad (8 \text{ 分})$$

三、（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续，在 $(0, 1)$ 内二阶可导，且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ ，证明：

1、至少存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使 $f(\xi) = 0$ ；2、至少存在 $\eta \in (0, 1)$ ，使 $f''(\eta) = f(\eta)$ 。

证：1、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 > 0$ ，由保号性， $\exists \delta_1 > 0$ ， $\forall x \in (0, \delta_1)$ ，有： $f(x) > 0$ ，

可取 $x_1 \in (0, \delta_1)$, 使 $f(x_1) > 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 2 > 0, \quad \exists \delta_2 > 0, \quad \forall x \in (1-\delta_2, 1), \quad \text{有: } f(x) < 0,$$

可取 $x_2 \in (1-\delta_2, 1)$, 使 $f(x_2) < 0$ 。

由介值定理结论正确。 (4 分)

$$2、\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1, \text{ 得 } f(0) = 0; \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 2, \text{ 得 } f(1) = 0; \text{ 又由 1 得, } f(\xi) = 0。$$

令 $g(x) = e^{-x} f(x)$, 在 $[0, \xi]$ 和 $[\xi, 1]$ 上分别应用罗尔定理知

$$\exists \xi_1 \in (0, \xi), \xi_2 \in (\xi, 1), \text{ 使 } g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = e^{-\xi_1} (f'(\xi_1) - f(\xi_1)) = e^{-\xi_2} (f'(\xi_2) - f(\xi_2)) = 0, \text{ 即}$$

$$f'(\xi_1) - f(\xi_1) = f'(\xi_2) - f(\xi_2) = 0,$$

再令 $F(x) = e^x (f'(x) - f(x))$, 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上再应用罗尔定理知

$$\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2), \text{ 使 } F'(\eta) = e^\eta (f''(\eta) - f(\eta)) = 0, \text{ 即}$$

$$f''(\eta) = f(\eta)。 \quad (10 \text{ 分})$$

四、(本题 8 分) 设曲线 $y = \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 与 x 轴, y 轴所围图形面积被曲线 $y = a \sin x, y = b \sin x (a > b > 0)$

三等分, 求 a, b 。

解: 曲线 $y = \cos x$ 和 $y = a \sin x$ 的交点坐标 $x = \arctan \frac{1}{a}$, 由题意知

$$\int_0^{\arctan \frac{1}{a}} (\cos x - a \sin x) dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx, \text{ 解得}$$

$$a = \frac{4}{3}。 \quad (4 \text{ 分})$$

同理, 由

$$\int_0^{\arctan \frac{1}{b}} (\cos x - a \sin x) dx = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx, \text{ 解得}$$

$$b = \frac{5}{12}。 \quad (8 \text{ 分})$$

五、(本题 8 分) 求 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x \cdot \arctan e^x dx$ 。

解: 原式 $= \int_0^{\pi} (\cos^4 x \cdot \arctan e^x + \cos^4(-x) \cdot \arctan e^{-x}) dx$

$$= \int_0^{\pi} \cos^4 x (\arctan e^x + \arctan e^{-x}) dx \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{而 } f'(x) = (\arctan e^x + \arctan e^{-x})' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 0,$$

$$\text{故 } \arctan e^x + \arctan e^{-x} = c = f(0) = \frac{\pi}{2}, \quad (6 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^4 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \\ &= \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16} \pi^2. \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

六、(本题 10 分) 证明不等式: $\frac{\sin \pi x}{\pi} > x(1-x)$ ($0 < x < 1$)。

证明: 设 $F(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi} - x(1-x)$ ($0 < x < 1$),

则 $F'(x) = \cos \pi x + 2x - 1$, $F''(x) = 2 - \pi \sin \pi x = \pi(\frac{2}{\pi} - \sin \pi x)$ 。

令 $F'(x) = 0$, 解得驻点为 $x = 0, \frac{1}{2}, 1$, 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上, $F''(x) = \pi(\frac{2}{\pi} - \sin \pi x)$ 仅有唯一的一个零点 ξ_1 , 且当 $0 < x < \xi_1$ 时, $F''(x) > 0$, 当 $\xi_1 < x < \frac{1}{2}$ 时, $F''(x) < 0$ 。 (4 分)

又 $F'(0) = F'(\frac{1}{2}) = 0$, 因此在 $(0, \frac{1}{2})$ 上, $F'(x) > 0$, 从而在 $(0, \frac{1}{2})$ 上, $F(x)$ 单调增加, 且 $F(x) > F(0) = 0$ 。类似地, 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上, $F''(x) = \pi(\frac{2}{\pi} - \sin \pi x)$ 仅有唯一的一个零点 ξ_2 , 且当 $\frac{1}{2} < x < \xi_2$ 时, $F''(x) < 0$, 当 $\xi_2 < x < 1$ 时, $F''(x) > 0$ 。 (7 分)

又 $F'(\frac{1}{2}) = F'(1) = 0$, 因此在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上, $F'(x) < 0$, 从而 $F(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调减少, 且 $F(x) > F(1) = 0$ 。综上所述, $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上恒大于零, 即 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 $F(0) = 0 = F(1)$, 即 $F(x) > 0, \forall x \in (0, 1)$, 从而不等式成立。 (10 分)

七、(本题 8 分) 在 $[0, 2\pi]$ 上 $f''(x)$ 连续, 且 $f''(x) \geq 0$, 证明 $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx \geq 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx &= \int_0^{2\pi} f(x) d \sin x \\ &= f(x) \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x) \sin x dx \\ &= \int_0^{2\pi} f'(x) d \cos x \\ &= f'(x) \cos x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(x) \cos x dx \quad (4 \text{ 分}) \\ &= (f'(2\pi) - f'(0)) - \int_0^{2\pi} f''(x) \cos x dx \\ &= \int_0^{2\pi} f''(x) dx - \int_0^{2\pi} f''(x) \cos x dx \\ &= \int_0^{2\pi} f''(x) (1 - \cos x) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

八、(本题 8 分) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ 。

$$\text{解: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \frac{x}{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \frac{x}{2} dx$$

$$\underline{\underline{x=2t}} \quad \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt$$

$$\underline{\underline{t = \pi/2 - x}} \quad \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx \quad (6 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx。$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2。 \quad (8 \text{ 分})$$

九、(本题 10 分) 设定义在 $[0,1]$ 上的可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) \geq M > 0$ ，证明：存在 $[0,1]$ 的一个子区间 I ，其长度为 $\frac{1}{4}$ ，对于 $x \in I$ ，有 $|f(x)| \geq \frac{1}{4}M$ 。

证 由于 $f'(x) > 0$ ，可知 $f(x)$ 单调增加，应用拉格朗日中值定理，有 $f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'(\xi)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{4}M$ ，

若 $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ ，则区间 $[\frac{1}{2}, 1]$ 为所求，在此区间内 $|f(x)| \geq \frac{1}{4}M$ 。 (5 分)

若 $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ，则在 $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 上有

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right) = f'(\xi)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \geq \frac{1}{4}M，$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}M， \quad |f\left(\frac{1}{4}\right)| \geq \frac{1}{4}M，$$

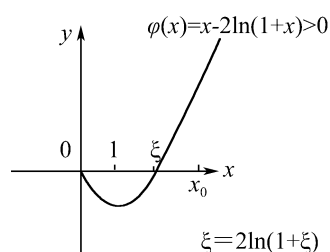
区间 $[0, \frac{1}{4}]$ 为所求，在此区间内 $|f(x)| \geq \frac{1}{4}M$ 。 (10 分)

十、(本题 10 分) 1、证明方程 $x = 2\ln(1+x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一实根 ξ ；

2、任取 $x_1 > \xi$ ， $x_{n+1} = 2\ln(1+x_n)$ ($n=1, 2, \dots$)，证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 。

解：1、 $\varphi(x) = x - 2\ln(1+x)$ ， $x > 0$ ，

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{2}{1+x} = \frac{x-1}{1+x}，$$



$\varphi'(x)=0$, $x=1$ (唯一)。

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
φ'	$-$	0	$+$
φ	0 $\searrow$	$1-2$	$\nearrow$ $+\infty$

$\Rightarrow \exists$ 唯一 $\xi \in (1,+\infty)$, 使 $\varphi(\xi)=0$ 。 (4 分)

2、 $x_1 > \xi, \xi = 2\ln(1+\xi) < x_2 = 2\ln(1+x_1) < x_1$ ($\varphi(x_0) > 0$),

设: $\xi < x_n < x_{n-1} \Rightarrow \xi = 2\ln(1+\xi) < x_{n+1} = 2\ln(1+x_n) < x_n$ ($\varphi(x_n) > 0$),

故, $\{x_n\}$ 单调减且有下界。

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 存在, 在 $x_{n+1} = 2\ln(1+x_n)$ 两边取极限。得 $a = 2\ln(1+a), a = \xi$ 。 (10 分)