

2024 年大连市数学竞赛试题(数学专业)答案

一、(15 分) 在空间直角坐标系内, 有一个曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$. 过 S 外一点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 作与 S 相切的所有直线. 请证明所有这些切线的切点都落在同一个平面 P 上, 并求出平面 P 的方程.

方法一: 曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 是以坐标原点 O 为球心, R 为半径的球面. 设

$M(x_1, y_1, z_1)$ 是满足题意的任意一个切点, 则 $\angle OMA = 90^\circ$, $|\overline{OM}| = R$. 而

$$|\overline{OA}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \text{ 由勾股定理得 } |\overline{AM}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2}$$

..... (3 分)

这说明切点 M 落在球面 S 与 $S_1: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$ 的交线上. 两个球面相交的交线是圆, 因此所有这些切线的切点都落在同一个平面 P 上.

..... (3 分)

平面 P 的法向量可取为 $\overline{AO}$, 设其方程为 $x_0x + y_0y + z_0z - D = 0$.

..... (2 分)

$$d_{OP} = \frac{R^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \quad d_{AP} = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$$

..... (2 分)

由点与平面的距离公式得

$$\begin{cases} |D| = R^2 \\ |x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - D| = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 \end{cases}$$

..... (3 分)

所以 $D = R^2$, 平面 P 的方程为 $x_0x + y_0y + z_0z = R^2$.

..... (2 分)

方法二: 设 $M(x_1, y_1, z_1)$ 是满足题意的任意一个切点, 则直线 AM 的方程可写作

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_1 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_1 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

..... (3 分)

将上述参数方程与曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 联立得

$$[x_1 + t(x_1 - x_0)]^2 + [y_1 + t(y_1 - y_0)]^2 + [z_1 + t(z_1 - z_0)]^2 = R^2.$$

..... (2 分)

$$[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2]t^2 + 2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_1x_0 - y_1y_0 - z_1z_0)t + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R^2$$

..... (2 分)

其中, 因为 $M(x_1, y_1, z_1)$ 在曲面 S 上, 所以 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R^2$, 从而化简得

$$[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2]t^2 + 2(R^2 - x_1x_0 - y_1y_0 - z_1z_0)t = 0.$$

..... (2 分)

因为直线 AM 与 S 相切, 切点为 M , 所以上述关于 t 的一元二次方程有二重根 $t = 0$, 也就是说

$$x_1x_0 + y_1y_0 + z_1z_0 = R^2.$$

..... (3 分)

可见, 所有这些切线的切点都满足 $x_0x + y_0y + z_0z = R^2$, 而且 x_0, y_0, z_0 不全为 0, 这说明

所有这些切线的切点都落在同一个平面 P 上, 平面 P 的方程即为 $x_0x + y_0y + z_0z = R^2$.

..... (3 分)

二、(15 分) 设 m ($m \geq 2$) 次多项式 $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 矩阵 $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$

且 $g(A) = 0$, 试问:

(1) A 是否在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上可对角化? 请说明理由。(6 分)

(2) A 是否在复数域 $\mathbb{C}$ 上可对角化? 请说明理由。(9 分)

解: (1) A 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可对角化。..... (2 分)

若不然, 则 A 的特征值 λ 必有理数。由于 $g(A) = 0$, 可知 $g(\lambda) = 0$, 即 $g(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$

上有有理根, 与 $g(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约矛盾。..... (4 分)

(2) A 在复数域 $\mathbb{C}$ 上必可对角化。..... (2 分)

因为 $g(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 则 $(g(x), g'(x)) = 1$, 即 $g(x)$ 没有重因式。故 $g(x)$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上没有重根。..... (3 分)

由 $g(A) = 0$ 知, A 的最小多项式 $m_A(x) | g(x)$, 则 $m_A(x)$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上没有重根。于是 A 在复数域 $\mathbb{C}$ 上必可对角化。..... (4 分)

三、(20 分) 设 σ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, 其最小多项式 $m_\sigma(x) = m_1(x)m_2(x)$, 其中 $m_1(x)$ 与 $m_2(x)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上两个互素的首项系数均为 1 的多项式。令 $V_1 = \{\alpha \in V \mid m_1(\sigma)\alpha = 0\}$, $V_2 = \{\alpha \in V \mid m_2(\sigma)\alpha = 0\}$ 。

证明: (1) V_1 与 V_2 均为 V 的子空间, 且是 σ 的不变子空间。(8 分)

(2) $V = V_1 \oplus V_2$ 。(12 分)

证明: (1) 显然 V_1 与 V_2 均为 V 的非空子集。设任意 $\alpha_1, \beta_1 \in V_1$, 任意 $k \in \mathbb{P}$, 有

$$m_1(\sigma)\alpha_1 = m_1(\sigma)\beta_1 = 0,$$

则 $m_1(\sigma)(\alpha_1 + \beta_1) = m_1(\sigma)\alpha_1 + m_1(\sigma)\beta_1 = 0$, $m_1(\sigma)(k\alpha_1) = km_1(\sigma)\alpha_1 = 0$ 。……(4 分)

从而 $(\alpha_1 + \beta_1) \in V_1$, $k\alpha_1 \in V_1$ 。故 V_1 为 V 的子空间。

由于 $m_1(\sigma)(\sigma(\alpha_1)) = \sigma m_1(\sigma)\alpha_1 = 0$, 即 $\sigma(\alpha_1) \in V_1$, 故 V_1 是 σ 的不变子空间。

同理, V_2 为 V 的子空间, 且是 σ 的不变子空间。……(4 分)

(2) 易知 $V_1 + V_2$ 为 V 的子空间, 从而 $V_1 + V_2 \subset V$ 。……(2 分)

由 $m_1(x)$ 与 $m_2(x)$ 互素知, 存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$ 使

$$u(x)m_1(x) + v(x)m_2(x) = 1$$

从而 $u(\sigma)m_1(\sigma) + v(\sigma)m_2(\sigma) = \varepsilon$ 为单位变换。……(2 分)

对任意 $\alpha \in V$ 有

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon\alpha = [u(\sigma)m_1(\sigma) + v(\sigma)m_2(\sigma)]\alpha \\ &= u(\sigma)m_1(\sigma)\alpha + v(\sigma)m_2(\sigma)\alpha \\ &= m_2(\sigma)v(\sigma)\alpha + m_1(\sigma)u(\sigma)\alpha. \end{aligned} \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $m_\sigma(x) = m_1(x)m_2(x)$ 是 σ 的最小多项式可知

$$m_\sigma(\sigma) = m_1(\sigma)m_2(\sigma) = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} m_1(\sigma)[m_2(\sigma)v(\sigma)\alpha] &= m_1(\sigma)m_2(\sigma)v(\sigma)\alpha = m_\sigma(\sigma)v(\sigma)\alpha = 0, \\ m_2(\sigma)[m_1(\sigma)u(\sigma)\alpha] &= m_2(\sigma)m_1(\sigma)u(\sigma)\alpha = m_\sigma(\sigma)u(\sigma)\alpha = 0. \end{aligned}$$

即 $m_2(\sigma)v(\sigma)\alpha \in V_1$, $m_1(\sigma)u(\sigma)\alpha \in V_2$ 。

从而 $\alpha \in V_1 + V_2$, 进而 $V \subset V_1 + V_2$. 故 $V = V_1 + V_2$ (3 分)

对于任意 $\xi \in V_1 \cap V_2$ 有 $m_1(\sigma)\xi = m_2(\sigma)\xi = 0$, 则

$$\begin{aligned}\xi &= \varepsilon \xi = [u(\sigma)m_1(\sigma) + v(\sigma)m_2(\sigma)]\xi \\ &= u(\sigma)m_1(\sigma)\xi + v(\sigma)m_2(\sigma)\xi = 0\end{aligned}$$

即 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. 故子空间的和 $V_1 + V_2$ 为直和。

综合可知: $V = V_1 \oplus V_2$ (3 分)

四、(10 分) 设函数列 $f_n(x) = \ln x + \ln^2 x + \cdots + \ln^n x$

证明: 1) 对任意的正整数 n , $f_n(x) = 1$ 在 $(1, e)$ 内有唯一实根 x_n . (3 分)

2) 数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求其极限. (7 分)

证明: 1) 因为 $f_n(x)$ 在 $[1, e]$ 连续且单调递增, 且

$$f_n(1) = 0 < 1, \quad f_n(e) = n > 1,$$

所以, 由连续函数的介值定理有 $f_n(x) = 1$ 在 $(1, e)$ 内有唯一实根 x_n (3 分)

2) 因为数列 $\{x_n\}$ 在 $(1, e)$ 内, 所以为有界数列, 下证 $\{x_n\}$ 单调递减.

若存在 $x_n < x_{n+1}$, 则 $\ln x_n < \ln x_{n+1}$, 从而有

$$1 = \ln x_n + \ln^2 x_n + \cdots + \ln^n x_n < \ln x_{n+1} + \ln^2 x_{n+1} + \cdots + \ln^n x_{n+1} + \ln^{n+1} x_{n+1} = 1$$

产生矛盾, 所以 $\{x_n\}$ 单调递减且有界, $\{x_n\}$ 极限存在. (4 分)

不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a \in [1, e)$. 而

$$1 = \ln x_n + \ln^2 x_n + \cdots + \ln^n x_n = \frac{\ln x_n - \ln^{n+1} x_n}{1 - \ln x_n}, \quad (1)$$

注意到 $a \in [1, e)$, 对于任意的 $q \in (a, e)$, 存在自然数 N , 使得 $1 < x_n < q$,

$$0 < \ln^{n+1} x_n < (\ln q)^{n+1} < 1, \quad \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^{n+1} x_n = 0.$$

对 (1) 式两边同时取极限 $1 = \frac{\ln a}{1 - \ln a}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{e}$ (3 分)

五、(10 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个严格单调递增的自然数列,

1) 判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0 a_1 \cdots a_n}$ 的收敛性。(3 分)

2) 判别其和为有理数还是无理数, 并给出证明。(7 分)

证明: 1) 因为 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个严格单调递增的自然数列,

所以 $\left| \frac{(-1)^n}{a_0 a_1 \cdots a_n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$, 而 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0 a_1 \cdots a_n}$ 绝对收敛. (3 分)

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0 a_1 \cdots a_n}$ 是无理数.

证明: (反证法)

假设 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0 a_1 \cdots a_n} = \frac{q}{p}$, 其中 p, q 均为自然数, 则 $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0 a_1} < \frac{q}{p} < \frac{1}{a_0}$,

而 $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0 a_1} - \frac{1}{a_0 + 1} = \frac{a_1(a_0 + 1) - (a_0 + 1) - a_0 a_1}{a_0 a_1(a_0 + 1)} = \frac{a_1 - (a_0 + 1)}{a_0 a_1(a_0 + 1)} \geq 0$

从而 $\frac{1}{a_1} \leq \frac{1}{a_0 + 1} < \frac{q}{p} < \frac{1}{a_0}$, 即 $p - qa_0 < q$ (4 分)

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1 - \frac{qa_0}{p}$, 继续递推可得 $\sum_{n=q}^{\infty} \frac{(-1)^{n-q}}{a_q a_{q+1} \cdots a_n} \leq 0$,

这与 $\frac{1}{a_q + 1} < \sum_{n=q}^{\infty} \frac{(-1)^{n-q}}{a_q a_{q+1} \cdots a_n} < \frac{1}{a_q}$ 矛盾. 因此, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0 a_1 \cdots a_n}$ 是无理数. (3 分)

六、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 并满足 $|f''(x)| \leq 1$, 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取到

最大值 $\frac{1}{2024}$, 证明: $|f(0)| + |f(1)| \leq \frac{507}{1012}$.

证明: 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且在 $(0,1)$ 内取到最大值 $\frac{1}{2024}$, 由介值定理及费

马定理知存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) = \frac{1}{2024}$ 且 $f'(x_0) = 0$ (3 分)

以 $x=0$ 及 $x=1$ 分别代入函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 Taylor 展开, 则分别存在

$\xi \in (0, x_0)$ 及 $\eta \in (x_0, 1)$ 使得

$$f(0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2 = \frac{1}{2024} + \frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2$$

$$\text{和 } f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2 = \frac{1}{2024} + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2$$

..... (4 分)

又 $|f''(x)| \leq 1$, 所以,

$$|f(0)| + |f(1)| \leq \frac{1}{2024} + \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2024} + \frac{1}{2}(1-x_0)^2 \leq \frac{1}{1012} + \frac{1}{2} = \frac{507}{1012}.$$

..... (3 分)

七、(10 分) 设 $AC - B^2 < 0$, 求 $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ 在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值与最小值之和。

$$\text{解: 因为在 } x^2 + y^2 < 1 \text{ 内, } \begin{cases} z'_x = 2Ax + 2By = 0 \\ z'_y = 2Bx + 2Cy = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} Ax + By = 0 \\ Bx + Cy = 0 \end{cases},$$

因为 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 < 0$, 所以驻点方程只有唯一解 $(0, 0)$, 且 $z(0, 0) = 0$ 。

..... (3 分)

在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 令 $L = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\text{令 } \begin{cases} L'_x = 2Ax + 2By - 2x\lambda = 0 \cdots (1) \\ L'_y = 2Bx + 2Cy - 2y\lambda = 0 \cdots (2) \end{cases} \text{ 由 } \frac{x}{2} \times (1) + \frac{y}{2} \times (2) \text{ 可得} \\ x^2 + y^2 = 1 \cdots (3)$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - \lambda(x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda.$$

由 (1), (2) 整理得 $\begin{cases} (A-\lambda)x + By = 0 \\ Bx + (C-\lambda)y = 0 \end{cases}$ 这是一个关于 x, y 的二元齐次线性方程, 要此方程组有

非零解, 则其系数行列式等于零, 即 $\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2) = 0,$

且 $AC - B^2 < 0$, 则

$$\lambda_1 = \frac{A+C+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}{2} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{A+C-\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}{2} < 0. \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

设 λ_1 对应点 (x_1, y_1) ; 设 λ_2 对应点 (x_2, y_2) , 则将 $z(0,0)=0$,
 $f(x_1, y_1) = Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 = \lambda_1$, $f(x_2, y_2) = Ax_2^2 + 2Bx_2y_2 + Cy_2^2 = \lambda_2$ 比较之,
 可得 $z_{\max} = \lambda_1$, $z_{\min} = \lambda_2$, 且 $z_{\max} + z_{\min} = \lambda_1 + \lambda_2 = A + C$ 。 $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

八、(10 分) 讨论函数 $f(x) = \cos(\sin x)$ 和 $g(x) = x \cos x$ 在 $[0, +\infty)$ 上的一致连续性并给出相应证明。

证明: 1. 下证函数 $f(x) = \cos(\sin x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$\forall x', x'' \in [0, +\infty)$, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一 ξ 介于 x', x'' 之间, 使得

$$|f(x') - f(x'')| = |-\sin(\sin \xi) \cos \xi| |x' - x''| \leq |x' - x''|$$

由李普希兹条件知 $f(x) = \cos(\sin x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续. $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

2. $g(x) = x \cos x$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\text{因为 } \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin x \geq \frac{2}{\pi} x. \text{ 选取 } x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4n+1}$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

但

$$\begin{aligned} |f(y_n) - f(x_n)| &= |y_n \cos y_n| = \left| \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4n+1} \right) \cos \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4n+1} \right) \right| \\ &= \left| \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4n+1} \right) \sin \frac{1}{4n+1} \right| > \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \frac{2}{(4n+1)\pi} = 1 \end{aligned}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(y_n) - f(x_n)] \neq 0$, 从而 $g(x) = x \cos x$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续。
 $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$