

大连市第三十一届高等数学竞赛试题 (A) 答案

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

考生注意： 考试时间 150 分钟 试卷总分 100 分

阅卷人	
得分	

一、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 总计 20 分)

1、 $f(x) = \frac{x^3 - x}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 3.

2、 设 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\quad \quad} \cdot \frac{\sin t - t \cos t}{4t^3}$

3、 $y = x + \frac{1}{x}$ 渐近线的条数为 2.

4、 设 $y = y(x)$, 若 $\int y dx \cdot \int \frac{1}{y} dx = -1, y(0) = 1$, 且 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y \rightarrow 0$, 则

$y = \underline{\quad \quad} \cdot y = e^{-x}$

5、 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与 $g(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是等价无穷小, 则 $ab = \underline{\quad \quad} \cdot -2$

6、 设 L 为 $|x| + |y| = 1$, 则 $\oint_L (x + y + |x|) ds = \underline{\quad \quad} \cdot 2\sqrt{2}$

7、 微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解为 . $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$

8、 曲面 $z = \arctan \frac{y}{x}$ 在点 $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ 处的切平面方程为 .

$x - y + 2z = \frac{\pi}{2}$

9、 已知 $I = \iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是介于平面 $z = 0$ 及 $z = 1$ 之间的圆柱面

$x^2 + y^2 = 1$, 则 $I = \underline{\quad \quad} \cdot \frac{\pi^2}{2}$

10、 $I = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dV$, 其中 Ω 是 xoy 面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平

面 $x = 5$ 所围成的闭区域, 则 $I = \underline{\quad \quad} \cdot \frac{250}{3} \pi$

学 校
姓 名
考 号

阅卷人	
得分	

二、（本题 10 分）设 $f(x)$ 连续， $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数)，

求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 、 $f(x)$ 连续知 $f(0)=0, \varphi(0)=0$ 2 分

令 $xt = u, x \neq 0$ ，则

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x f(u)du}{x} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$x \neq 0$ 时，

$$\varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2} \end{aligned}$$

故

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{A}{2}, & x = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(t)dt}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} \\ &= A - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2} = \varphi'(0) \end{aligned}$$

所以 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 连续.....10 分

学 校
姓 名
考 号

阅卷人	
得 分	

三、(本题 8 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, $|f'(x)| \leq f(x)$, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明: 首先证明对每个非负整数 n , $f(x)$ 在 $[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}]$ 上恒等于零. 这就得到在 $[0, +\infty)$ 上

$f(x)$ 恒为零.

当 $n = 0$ 时, 设点 x_0 , 使得 $|f(x_0)| = \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} \{|f(x)|\}$, 2 分

则由拉格朗日中值定理得到存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ 使得 $f(x_0) = f'(\xi)x_0$, 这时

$|f(x_0)| = |f'(\xi)x_0| \leq \frac{1}{2}|f(\xi)| \leq \frac{1}{2}|f(x_0)|$, 所以 $|f(x_0)| = 0$, 因此在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上,

$f(x) \equiv 0$ 4 分

设 $f(x)$ 在 $[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}]$ 上恒等于零, 那么在区间 $[\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}]$ 上, 设点 x_0 使得

$|f(x_0)| = \max_{x \in [\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}]} \{|f(x)|\}$, 则由拉格朗日中值定理得到存在 $\xi \in (\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2})$ 使得

$f(x_0) = f'(\xi)(x_0 - \frac{n+1}{2})$, 这时

$|f(x_0)| = |f'(\xi)(x_0 - \frac{n+1}{2})| \leq \frac{1}{2}|f(\xi)| \leq \frac{1}{2}|f(x_0)|$ 6 分

所以 $|f(x_0)| = 0$, 因此在 $[\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}]$ 上 $f(x) \equiv 0$. 由归纳法可见在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$. 同理

可证明在 $(-\infty, 0]$ 上 $f(x) \equiv 0$ 8 分

阅卷人	
得 分	

四、（本题 8 分）设 $a < b < c$ ， $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上具有二阶导数 $f''(x)$ ，则 $\exists \xi \in (a, c)$ ，使

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(\xi).$$

证明 设 $F(x) = f(x)(b-c) + f(b)(c-x) + f(c)(x-b) - \frac{1}{2} K(x-b)(x-c)(b-c)$, 2 分

则 $F(a) = 0 = F(b) = F(c)$, 4 分

由罗尔定理，得

$F'(\xi_1) = 0$, $\xi_1 \in (a, b)$, $F'(\xi_2) = 0$, $\xi_2 \in (b, c)$, 6 分

$$F''(\xi) = 0, \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, c),$$

$$\text{又 } F''(x) = f''(x)(b-c) - K(b-c),$$

所以, $K = f''(\xi)$. 故原命题成立. 8 分

阅卷人	
得 分	

五、（本题 8 分）极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - e^{-1} x \right)$

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{x^x}{(1+x)^x} - e^{-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x (e^{x \ln \frac{x}{1+x}} - e^{-1}) \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-1} (e^{x \ln \frac{x}{1+x} + 1} - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-1} (x \ln \frac{x}{1+x} + 1) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= e^{-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t} \ln \frac{1}{1+\frac{1}{t}} + 1}{\frac{1}{t}}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= e^{-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{1+t} + t}{t^2} = e^{-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2} e^{-1} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

学 校
姓 名
考 号

阅卷人	
得 分	

六、（本题 10 分）已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2(y+1)$, 且

$f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

解 由 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2(y+1)$, 可知, $f(x, y) = \int 2(y+1)dy = (y+1)^2 + \varphi(x)$, 2 分

又

$f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 得

$(y+1)^2 - (2-y)\ln y = (y+1)^2 + \varphi(y)$, 4 分

则

$\varphi(y) = -(2-y)\ln y$, 曲线 $f(x, y) = 0$ 的方程为

$(y+1)^2 = (2-x)\ln x (1 \leq x \leq 2)$, 6 分

其所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积为

$V = \pi \int_1^2 (y+1)^2 dx = \pi \int_1^2 (2-x)\ln x dx = (2\ln 2 - \frac{5}{4})\pi$ 10 分

阅卷人	
得 分	

七、（本题6分）试证：若 $z = z(x, y)$ 为封闭的光滑曲面， $\mathbf{l}$ 为任意固定的已知方向，则 $\oint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) dS = 0$, 式中 $\mathbf{n}$ 为曲面的外

法线向量.

证明 设 $\mathbf{l}_1 = (a, b, c)$ 为 $\mathbf{l}$ 方向的单位向量， $\mathbf{n}_1$ 是外法线的单位向量：.....2分

$\mathbf{n}_1 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 则

$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) = \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma$ 4分

由高斯公式, 得:

$$\oint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) dS = \oint_S (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) dS$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V 0 dx dy dz = 0 . \dots\dots\dots 6分$$

阅卷人	
得分	

八、（本题10分）求函数 $z = f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$ 的极值.

解 求偏导得 $\begin{cases} z'_x = -x(2y + 3xy - 5x^3) = 0 \\ z'_y = 2y - x^2 - x^3 = 0 \end{cases}$ 驻点为 $(0, 0), (1, 1), (\frac{2}{3}, \frac{10}{27})$ 2分

$$z''_{xx} = -(2y + 3xy - 5x^3) - x(3y - 15x^2), z''_{xy} = -x(2 + 3x), z''_{yy} = 2.$$

$$\text{代入 } (0, 0), \text{ 则 } \begin{cases} A = z''_{xx}(0, 0) = 0, \\ B = z''_{xy}(0, 0) = 0, \text{ 则 } AC - B^2 = 0, \text{ 故充分条件失效, 4分} \\ C = z''_{yy}(0, 0) = 2 \end{cases}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 取 $y = x^2 + kx^3 (k > 0), z = (y - x^2)(y - x^3) = kx^5 + o(x^5)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^5 + o(x^5)}{x^5} = k > 0, \text{ 由极限的保号性知, 存在 } \delta > 0,$$

当 $x \in (-\delta, 0)$ 时, $\frac{f(x, y)}{x^5} > 0, f(x, y) < 0 = f(0, 0),$

当 $x \in (0, \delta)$ 时, $\frac{f(x, y)}{x^5} > 0, f(x, y) > 0 = f(0, 0),$

故, $(0, 0)$ 不是极值点; 6分

$$\text{代入 } (1, 1), \text{ 则 } \begin{cases} A = z''_{xx}(1, 1) = 12, \\ B = z''_{xy}(1, 1) = -5, \text{ 则 } AC - B^2 < 0, \text{ 故 } (1, 1) \text{ 不是极值; 8分} \\ C = z''_{yy}(1, 1) = 2 \end{cases}$$

$$\text{代入 } (\frac{2}{3}, \frac{10}{27}), \begin{cases} A = z''_{xx}(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}) = \frac{100}{27}, \\ B = z''_{xy}(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}) = -\frac{8}{3}, \\ C = z''_{yy}(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}) = 2 \end{cases} AC - B^2 > 0, A > 0, \text{ 故 } (\frac{2}{3}, \frac{10}{27}) \text{ 是极小值点, 故}$$

$$z(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}) = -\frac{4}{729} \text{ 为极小值. 10分}$$

学 校
姓 名
考 号

阅卷人	
得 分	

九、（本题 10 分）设连续可微函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$F(xz - y, x - yz) = 0$ （其中 $F(u, v)$ 有连续的偏导数）唯一确定, L

为正向单位圆周. 试求:

$$I = \oint_L (xz^2 + 2yz)dy - (2xz + yz^2)dx$$

证明 令 $P(x, y) = -2xz - yz^2, Q(x, y) = xz^2 + 2yz$,

$$\text{则 } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(xz + y) \frac{\partial z}{\partial x} + z^2, \frac{\partial P}{\partial y} = -2(x + yz) \frac{\partial z}{\partial y} - z^2, \dots\dots\dots 2\text{分}$$

利用格林公式

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (xz + y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x + yz) \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 dx dy \dots\dots\dots 4\text{分}$$

方 程 $F = 0$ 对 x 求 导 , 得 到 , $(z + x \frac{\partial z}{\partial x})F_u + (1 - y + x \frac{\partial z}{\partial x})F_v = 0$ 即

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{zF_u + F_v}{xF_u - yF_v}, \text{ 同样, 可得 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_u + zF_v}{xF_u - yF_v} \dots\dots\dots 8\text{分}$$

$$\text{于是 } (xz + y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x + yz) \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= -\frac{(xz + y)(zF_u + F_v)}{xF_u - yF_v} + \frac{(x + yz)(F_u + zF_v)}{xF_u - yF_v}$$

$$= \frac{xF_u(1 - z^2) - yF_v(1 - z^2)}{xF_u - yF_v}$$

$$= 1 - z^2$$

$$I = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = 2\pi \dots\dots\dots 10\text{分}$$

阅卷人	
得 分	

十、(本题 10 分) 已知 $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$, 且当 $n \geq 2$ 时, 有 $na_n = [\frac{1}{2} + (n-1)]a_{n-1}$, 证明当 $|x| < 1$

时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求和函数.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\frac{1}{2} + n)a_n}{na_n} \right| = 1$, 所以当 $|x| < 1$ 时,

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 2分

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则 $S'(x) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 4分

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} [\frac{1}{2} + (n-1)]a_{n-1}x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n-1} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$$

$$= \frac{1}{2} S(x) + xS'(x) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

解微分方程 $\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{1}{2(1-x)}, S(0) = 1$, 得 $S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

故幂级数的和函数为 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 10 分