

大连市第三十一届高等数学竞赛试题 (B)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

考生注意： 考试时间 150 分钟 试卷总分 100 分

阅卷人	
得 分	

一、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 总计 20 分)

1、设 $f(x) = \int_0^{e^x-1} \sin^k t dt$, $g(x) = 3x^3 + 5x^4$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小, 则 $k = \underline{2}$.

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x^2-9)}{\sin \pi x}, & x < 0 \\ \frac{x(x^2-4)}{x-2}, & x \geq 0 \end{cases}$ 的可去间断点为 $x_1 = 2, x_2 = -3$.

3. 方程 $6x + \ln^6 x - 6 \ln x - 7 = 0$ 有 2 个实根.

4. 函数 $f(x) = (x^2 + 2x - 15) |x^3 - 2x^2 - 3x|$ 不可导点的个数是 2 个.

5. 设 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$, 则 $f^{(7)}(0) = \underline{6! \text{ 或 } 720}$.

6. 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |2 \sin x|)$, 若 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 则 $f(0) = \underline{0}$.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \frac{n+3}{n^2+9} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n^2} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

8. 设 $I_k = \int_0^{k\pi} (1+x^2) \sin x dx (k=1,2,3)$, 则 I_1, I_2, I_3 的大小关系为 $I_2 < I_1 < I_3$.

9. 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 所围的平面图形绕直线 $x = 1$ 旋转一周所得的旋转体体积为 $\frac{\pi}{6}$.

10. 已知 $G'(x) = e^{(x-1)^2}$, $G(0) = 0$, 则 $\int_0^1 G(x) dx = \frac{1}{2}(e-1)$.

学 校
姓 名
考 号

阅卷人	
得 分	

二、(本题 8 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n^n + x_n - 1 = 0$, $0 < x_n < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解: 令 $F(x) = x^n + x - 1$, $F(0) = -1 < 0$, $F(1) = 1 > 0$,

则 $\exists x_n \in (0, 1)$, 使 $x_n^n + x_n - 1 = 0$. (2 分)

令 $G(x) = x^{n+1} + x - 1$, $G(1) = 1 > 0$, $G(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 < x_n^n + x_n - 1 = 0$,

则 $\exists x_{n+1} \in (x_n, 1)$, 使 $G(x_{n+1}) = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 = 0$. (4 分)

由于 $x_{n+1} > x_n$, 所以数列 $\{x_n\}$ 单调递增, 又已知 $0 < x_n < 1$, 可得数列 $\{x_n\}$ 收敛. (6 分)

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1 = 0$, (1)

若 $0 \leq A < 1$, $0 < x_n \leq A$, 有 $0 < x_n^n \leq A^n$.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$, 由 (1) 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, 矛盾.

因此 $A = 1$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 1$. (8 分)

阅卷人	
得 分	

三、(本题 8 分) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 在 $x = 0$ 的某去心邻域内 $f(x) \neq 0$,

且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f''(0) = 6$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解: 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则 $f(0) = 0$. (2 分)

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. (4 分)

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x}}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}} = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2} f''(0) = 3$. (6 分)

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$. (8 分)

学 校	
姓 名	
考 号	

阅卷人	
得 分	

四、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，且

$f(0) = f'(0) = 0$ ， $f''(0) > 0$ ，又设 $u = u(x)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点

$(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{u(x)}$ 。

解：曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线方程为 $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$ 。

令 $Y = 0$ ，得切线在 x 轴上的截距 $u(x) = -\frac{f(x)}{f'(x)} + x = \frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)}$ 。 (2 分)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{u(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf'(x)}{xf'(x) - f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x) + 2xf''(x)}{xf''(x)} \quad (4 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$= 2 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{xf''(x)} \quad (6 \text{ 分})$$

$$= 2 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \cdot \frac{1}{f''(x)}$$

$$= 2 + 2f''(0) \cdot \frac{1}{f''(0)}$$

$$= 4.$$

(8 分)

阅卷人	
得分	

五、(本题 8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 且有 $f(x) = \frac{2x}{1+\cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx$, 求 $f(x)$.

解: 设 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = A$, 则 $f(x) = \frac{2x}{1+\cos^2 x} + A$. (2 分)

等式两边同时乘以 $\sin x$ 再取积分, 有 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x \sin x}{1+\cos^2 x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} A \sin x dx$.

由奇偶性可知 $\int_{-\pi}^{\pi} A \sin x dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = 4 \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

则有 $A = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = 4 \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$. (4 分)

设 $x = \pi - t$, $A = 4 \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin t}{1+\cos^2 t} (-1) dt = 4\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - 4 \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} dt$. (6 分)

即 $A = 4\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - A$,

$A = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt = -2\pi \int_0^{\pi} \frac{d \cos t}{1+\cos^2 t} = -2\pi \arctan(\cos t) \Big|_0^{\pi} = \pi^2$.

因此, $f(x) = \frac{2x}{1+\cos^2 x} + \pi^2$. (8 分)

阅卷人	
得分	

六、(本题 8 分) 求不定积分 $I = \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$.

解:

$$I = \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$$

$$= -\int xe^x d \frac{1}{1+x} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x} (e^x + xe^x) dx \quad (4 \text{ 分})$$

$$= -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x dx \quad (6 \text{ 分})$$

$$= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + C. \quad (8 \text{ 分})$$

学 校
姓 名
考 号

阅卷人	
得 分	

七、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导,

求证: $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$.

证明: 设 $F(x) = f(x)(b-x) + xf(a)$, (2 分)

$F'(x) = f'(x)(b-x) - f(x) + f(a)$. (4 分)

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $F(a) = bf(a) = F(b)$,

由罗尔定理, 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $F'(\xi) = 0$. (8 分)

因此, $F'(\xi) = f'(\xi)(b-\xi) - f(\xi) + f(a) = 0$.

即 $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$. (10 分)

阅卷人	
得分	

八、(本题 10 分) 求证不等式: $\frac{e^b - e^a}{b - a} < \frac{e^b + e^a}{2} (a \neq b)$.

证明: 设 $a < b$.

令 $f(x) = (e^x + e^a)(x - a) - 2(e^x - e^a)$, $x \geq a$, $f(a) = 0$.

$$f'(x) = e^x(x - a) + (e^x + e^a) - 2e^x = e^x(x - a) - (e^x - e^a). \quad (2 \text{ 分})$$

设 $g(x) = e^x$, $x \geq a$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导,

由拉格朗日中值定理, 有 $e^x - e^a = e^\xi(x - a)$, $\xi \in (a, x)$. (5 分)

则 $f'(x) = e^x(x - a) - e^\xi(x - a) = (e^x - e^\xi)(x - a)$.

因此 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, $f(x) > f(a) = 0$, $x > a$. (8 分)

取 $x = b > a$, 有 $f(b) = (e^b + e^a)(b - a) - 2(e^b - e^a) > 0$.

$$\text{即 } \frac{e^b - e^a}{b - a} < \frac{e^b + e^a}{2}. \quad (10 \text{ 分})$$

学 校
姓 名
考 号

阅卷人	
得 分	

九、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的导数, 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx .$$

证明: (方法一) 由积分中值定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$.
(2 分)

又由于 $\int_{\xi}^x f'(t) dt = f(x) - f(\xi)$, 有 $f(x) = f(\xi) + \int_{\xi}^x f'(t) dt$, (4 分)

则 $\forall x \in [a, b]$, 有

$$|f(x)| \leq |f(\xi)| + \left| \int_{\xi}^x f'(t) dt \right| \leq |f(\xi)| + \int_a^b |f'(x)| dx = \frac{\left| \int_a^b f(x) dx \right|}{b-a} + \int_a^b |f'(x)| dx .$$

(8 分)

$$\text{因此, } \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx . \quad (10 \text{ 分})$$

(方法二) 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 可得 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续, 根据最值定理,
 $\exists x_0 \in [a, b]$, 使得 $|f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

由于 $\int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x) - f(x_0)$, $x \in [a, b]$, 有 $f(x_0) = f(x) - \int_{x_0}^x f'(t) dt$.
(2 分)

两边同时取积分, 有 $\int_a^b f(x_0) dx = f(x_0)(b-a) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \left(\int_{x_0}^x f'(t) dt \right) dx$.
(4 分)

$$\left| \int_a^b f(x_0) dx \right| = |f(x_0)|(b-a) \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_a^b \left(\int_{x_0}^x f'(t) dt \right) dx \right| ,$$

(6 分)

$$\text{有 } |f(x_0)|(b-a) \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b \left(\int_a^b |f'(t)| dt \right) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(t)| dt (b-a) ,$$

(8 分)

$$\text{因此 } |f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx . \quad (10 \text{ 分})$$

阅卷人	
得分	

十、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 求证: 在 (a, b) 内存在唯一的 ξ , 使曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi)$, $x = a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi)$, $x = b$ 所围平面图形面积 S_2 的二倍.

$$\text{解: } S_1 = \int_a^{\xi} [f(\xi) - f(t)] dt, \quad S_2 = \int_{\xi}^b [f(t) - f(\xi)] dt,$$

$$S_1 = 2S_2, \text{ 即 } \int_a^{\xi} [f(\xi) - f(t)] dt = 2 \int_{\xi}^b [f(t) - f(\xi)] dt. \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{令 } F(x) = \int_a^x [f(x) - f(t)] dt - 2 \int_x^b [f(t) - f(x)] dt, \quad x \in [a, b], \quad F(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续}, \quad (3 \text{ 分})$$

由于在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增, 有

$$F(a) = -2 \int_a^b [f(t) - f(a)] dt < 0, \quad F(b) = \int_a^b [f(b) - f(t)] dt > 0,$$

由介值定理可知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F(\xi) = 0$,

$$\text{即 } \int_a^{\xi} [f(\xi) - f(t)] dt = 2 \int_{\xi}^b [f(t) - f(\xi)] dt. \quad (5 \text{ 分})$$

$$F(x) = \int_a^x [f(x) - f(t)] dt - 2 \int_x^b [f(t) - f(x)] dt = f(x)(x-a) - \int_a^x f(t) dt - 2 \int_x^b f(t) dt + 2f(x)(b-x), \quad (6 \text{ 分})$$

$$F'(x) = f'(x)(x-a) + f(x) - f(x) + 2f(x) + 2f'(x)(b-x) - 2f(x),$$

$$F'(x) = f'(x)(x-a) + 2f'(x)(b-x) = f'(x)[2(b-x) + (x-a)] > 0, \quad (8 \text{ 分})$$

$F(x)$ 单调递增, 因此有且仅有一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F(\xi) = 0$,

$$\text{即有且仅有一点 } \xi \in (a, b), \text{ 使 } \int_a^{\xi} [f(\xi) - f(t)] dt = 2 \int_{\xi}^b [f(t) - f(\xi)] dt \text{ 成立.} \quad (10 \text{ 分})$$