



东北财经大学
DONGBEI UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS



概率论与数理统计



数据科学与人工智能学院
SCHOOL OF DATA SCIENCE AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE



东北财经大学

DONGBEI UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS

概率论与数理统计

- **教材：**《概率论与数理统计》
- **主编：**富宇、于洋、孙晓霞
- **ISBN：**978-7-04-063147-0
- **出版单位：**高等教育出版社
- **出版时间：**2024年9月



数据科学与人工智能学院
SCHOOL OF DATA SCIENCE AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE



东北财经大学
DONGBEI UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS

概率论与数理统计



第一章

随机事件与概率



数据科学与人工智能学院
SCHOOL OF DATA SCIENCE AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE



§ 1.1 样本空间与随机事件

抛一枚硬币, 其结果可能是硬币正面朝上, 也可能是硬币反面朝上; 新生的婴儿可能是男孩或女孩. 这类现象, 在一定的条件下, 可能出现这样的结果, 也可能出现那样的结果, 而在试验或观察之前不能预先知道哪一个结果会出现. 但人们经过长期实践并深入研究之后, 发现这类现象在大量重复试验或观察下, 它的结果却呈现出某种规律性.

例如, 将一枚硬币重复抛掷多次, 硬币正面朝上的次数约占一半. 根据各个国家各个时期的人口统计资料, 新生婴儿中男婴和女婴的比例大约 1:1.





在 2021 年 5 月发布的第七次全国人口普查结果显示, 出生人口性别比为 111.3:100. 又如, 人的身高虽然各不相同, 但经过大量的统计, 在一定范围内身高按照一定规律分布 (近似一条钟形的曲线) .

这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性, 称为统计规律性. 这种在个别试验中其结果呈现出不确定性, 在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象, 称为随机现象.

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.



一、随机事件的概念

对随机现象的观察或试验, 称为**随机试验**, 简称**试验**. 做试验的目的是考察试验出现的可能结果. 试验的每一个可能结果称为**样本点**, 用 ω 表示.

试验的所有可能结果组成的集合称为试验的**样本空间**, 用 Ω 表示.

- 每次试验必然出现1个且只能出现1个样本点.
- 样本点可以是数也可以不是数.
- 样本空间是集合, 并且是研究对象的全集, 样本点是样本空间的元素, 是今后抽样的最基本单元. 我们是通过研究随机试验来研究随机现象的, 认识随机现象首先要列出它的样本空间.



例 1 写出下列试验的样本空间.

(1) 抛一枚硬币时, 用 H (head) 表示硬币正面朝上, 用 T (tail) 表示硬币反面朝上. 本试验的样本点是 H 和 T, 样本空间为 $\Omega = \{H, T\}$.

(2) 抛两枚硬币, 观察硬币正面、反面出现的情况. 将两枚硬币区分为第一枚和第二枚. 试验一共有 4 个样本点, 样本空间为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}.$$

注意, 本试验的样本点是二维的, $\omega_2 = (H, T)$ 和 $\omega_3 = (T, H)$ 是不同的样本点, 其中 $\omega_2 = (H, T)$ 表示第一枚硬币正面朝上, 第二枚硬币反面朝上.



(3) 掷一枚骰子, 观察出现的点数. 用 j 表示掷出点数 j ($j = 1, 2, \dots, 6$), 样本空间为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

(4) 记录某城市120急救电话台一昼夜接到的呼唤次数. 样本空间为

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

(5) 在一批灯泡中任意抽取一只, 测试其寿命 (单位: h), 样本空间为

$$\Omega = \{t \mid t \geq 0\} = \{\omega \mid \omega \geq 0\} = [0, +\infty),$$

其中 t (或 ω) 表示灯泡的寿命.

(6) 在单位圆内任意取一点, 记录它在直角坐标系下的坐标, 样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$


随机试验的某些样本点组成的集合称为**随机事件**, 简称**事件**, 常用大写字母 A, B, C 或 $A_1, A_2, \dots$ 表示.

例如, 掷一枚骰子的样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 用集合 $A = \{5, 6\}$ 表示“掷出的点数大于 4”, 则 A 是一个事件, A 是 Ω 的一个子集.

事件 A 可能发生也可能不发生, 如果掷出 5 点或 6 点, 就称事件 A 发生, 否则称事件 A 不发生. 事件 A 发生和掷出 5 点或 6 点是等价的.

事件可以用集合表示, 也可用语言描述. 也可记 $A = \{ \text{掷出的点数大于 4} \}$, 即

$$A = \{ \text{掷出的点数大于 4} \} = \{5, 6\} \subset \Omega.$$



用集合 $B = \{3\}$ 表示“掷出 3 点”，则 B 是一个事件. 如果掷出 3 点, 则称事件 B 发生, 否则称事件 B 不发生.

$$B = \{\text{掷出 3 点}\} = \{3\} \subset \Omega$$

又如, 在一批灯泡中任意抽取一只, 测试它的寿命 (单位: h), 样本空间为 $\Omega = \{t \mid t \geq 0\}$. 用集合 $C = \{t \mid t \geq 500\}$ 表示“灯泡寿命不少于 500 h”, C 是一个事件,

$$C = \{\text{灯泡寿命不少于 500 h}\} = \{t \mid t \geq 500\} \subset \Omega.$$

因为在实际问题中往往并不需要关心 Ω 的所有子集, 所以只要把关心的子集称为事件就够了. 严格地说, 事件是指 Ω 中的满足某些条件的子集.



- 特别地, 由一个样本点组成的单点集, 称为基本事件, 所以样本空间也称为基本事件空间. 一个基本事件表示试验的一个可能结果, 样本点也表示试验的一个可能结果. 要注意的是, 基本事件是样本空间的子集, 而样本点是样本空间的元素. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$.
- 在一次试验中, 事件 A 可能发生, 也可能不发生.
事件 A 发生当且仅当 A 中某个样本点出现了.
- 空集 $\emptyset$ 是样本空间 Ω 的子集, 因为 Ω 中没有样本点, 永远不会发生, 所以 $\emptyset$ 称为不可能事件. Ω 也是 Ω 的子集, 包含了所有的样本点, 因而在每次试验中总会发生, Ω 称为必然事件.



二、事件的关系及运算

对集合可以进行集合运算, 其结果仍然是集合. 由于事件是子集, 所以可以对事件进行集合的运算, 其结果仍然是事件. **事件 A 发生和试验结果 $\omega \in A$ 是等价的**, 事件 A 不发生和试验结果 $\omega \notin A$ 是等价的.

以下设 $A, B, C, A_k (k=1, 2, \dots)$ 为随机事件.

1. 若 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 则称事件 B 包含事件 A , 或 A 被包含在 B 中.

这指的是**事件 A 发生必然导致事件 B 发生**.

显然, $\emptyset \subset A \subset \Omega$. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset C$, 则 $A \subset C$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $A = B$, 则称事件 A 与事件 B **相等**.

2. 事件 $A \cap B$ (或 AB) 发生, 当且仅当 A 和 B 同时发生.

显然, $A \cap \Omega = A$, $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $ABC \subset AB \subset A$, $A \subset B \Rightarrow AB = A$.

$\bigcap_{j=1}^n A_j$ 发生, 当且仅当 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 都发生; $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ 发生, 当且仅当可列无穷多个 (以后简称可列个) 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 都发生.

3. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 互不相容, 或互斥, 或不相交.

这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生.

若 $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots$, 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是两两互不相容的事件. 基本事件是两两互不相容的.



4. 事件 $A \cup B$ 发生, 当且仅当 A, B 中至少有一个发生.

显然, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \subset (A \cup B)$, $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.

$\bigcup_{j=1}^n A_j$ 发生, 当且仅当 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生;

$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ 发生, 当且仅当可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个发生.

5. 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互为对立事件, 或逆事件.

这指的是对每次试验而言, 事件 A, B 中必有一个发生, 且仅有一个发生..

A 的对立事件记为 $\bar{A}$ 或 A^C , 表示事件 A 不发生. $\bar{A}$ 为 A 的“补集”, 即 Ω 中不属于 A 的样本点组成的集合. 在一次试验中, A 发生, 则 $\bar{A}$ 一定不发生;

A 不发生, 则 $\bar{A}$ 一定发生. 所以 A 与 $\bar{A}$ 中必有一个且仅有一个发生.



显然, $A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $\bar{\bar{A}} = A$. 若 $A \subset B$, 则 $\bar{A} \supset \bar{B}$.

若 A 与 B 互为对立事件, 则 A 与 B 一定互不相容.

但互不相容的事件不一定互为对立事件.

6. 事件 $A - B$ 发生, 当且仅当 A 发生, B 不发生.

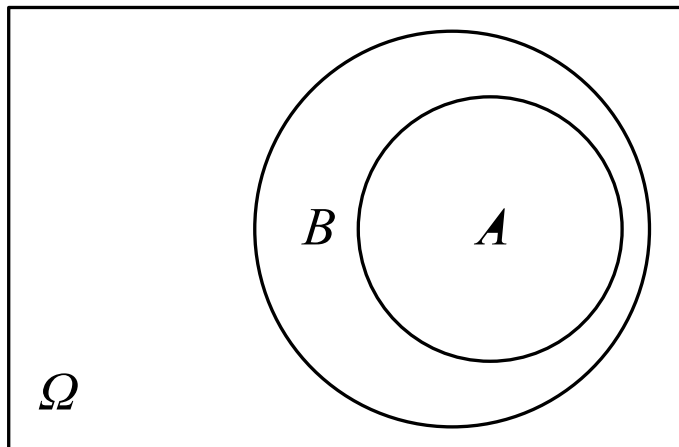
显然, $A - B = A \cap \bar{B}$.

$A - B = A - AB$ ($A - B$ 发生, 当且仅当 A 发生而 AB 不发生) .

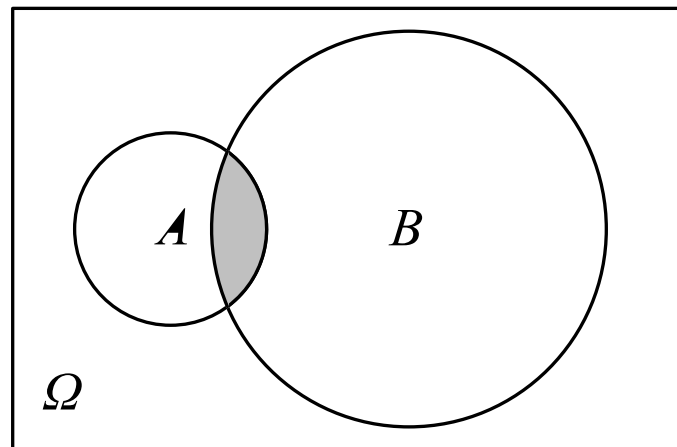
$\bar{A} = \Omega - A = \Omega \cap \bar{A}$ ($\bar{A}$ 发生, 当且仅当 Ω 发生而 A 不发生) .

在概率论中常用一个长方形表示样本空间, 用其中一个圆或其他几何图形表示事件 A , 这类图形称为维恩 (Venn) 图. 它可直观地表示事件之间的关系与运算, 见图 1-1

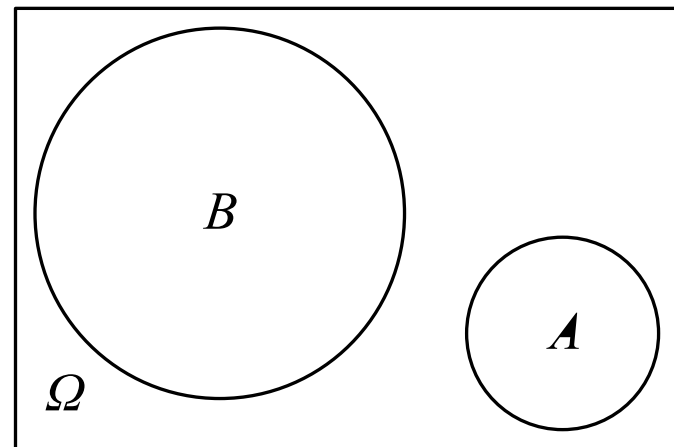




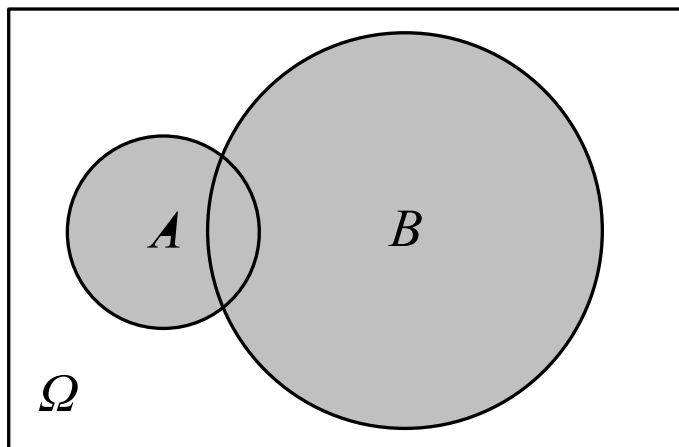
$$A \subset B$$



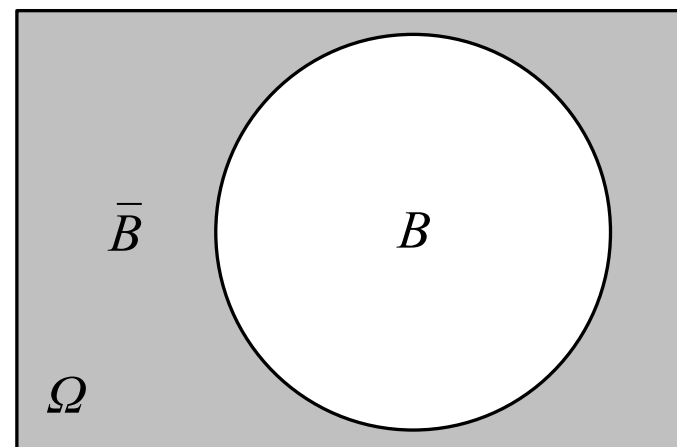
$$A \cap B$$



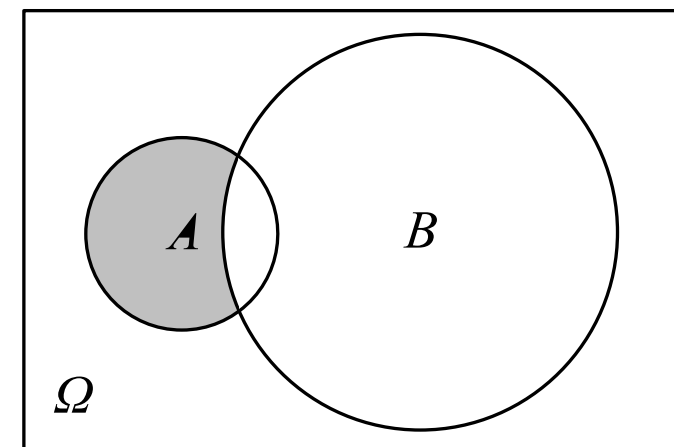
$$A \cap B = \emptyset$$



$$A \cup B$$



$$B \cup \bar{B} = \Omega, B \cap \bar{B} = \emptyset$$



$$A - B$$



在进行事件运算时, 经常要用到下述运算律.

- 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 或 $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 或 $A(B \cup C) = AB \cup AC$,

$$A \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_n) = (A \cup A_1) \cap \cdots \cap (A \cup A_n), \quad A \cup \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} (A \cup A_j),$$

$$A(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = AA_1 \cup AA_2 \cup \cdots \cup AA_n, \quad A \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} AA_j.$$



• 德摩根 (De Morgan) 律 (对偶律) :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n, \quad \overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_n,$$

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{A}_j, \quad \overline{\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{A}_j.$$

例 2 设 A, B 为随机事件. 证明以下结论:

$$(1) A = AB \cup A\bar{B}, \text{ 且 } (AB)(A\bar{B}) = \emptyset; \quad (2) A \cup B = A \cup \bar{A}B, \text{ 且 } A(\bar{A}B) = \emptyset.$$

证 (1) $A = A\Omega = A(B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B}, \quad (AB)(A\bar{B}) = AB\bar{B}A = A\emptyset A = \emptyset.$

$$(2) A \cup B = \Omega(A \cup B) = (A \cup \bar{A})(A \cup B) = A \cup \bar{A}B, \quad A(\bar{A}B) = A\bar{A}B = \emptyset.$$



例2的结论是值得牢记的,

事件 A 可划分为两个互不相容的事件 AB 与 $A\bar{B}$ 的并;

事件 $A \cup B$ 可划分为两个互不相容的事件 A 与 $\bar{A}B$ 的并.

易见 $A\bar{B} \cup B = A \cup B$. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$. (了解)  P5 例3

例 4 设 A, B, C 为三个事件, 用 A, B, C 的运算关系表示下列事件:

- (1) $\{A, B, C \text{ 恰好有一个发生}\}$; (2) $\{A, B, C \text{ 恰好有两个发生}\}$;
- (3) $\{A, B, C \text{ 都发生}\}$; (4) $\{A, B, C \text{ 中至少有一个发生}\}$;
- (5) $\{A, B, C \text{ 都不发生}\}$; (6) $\{A, B, C \text{ 中不多于两个发生}\}$;
- (7) $\{A, B, C \text{ 中至少有两个发生}\}$.



解：(1) $\{A, B, C \text{ 恰好有一个发生}\} = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C.$

(2) $\{A, B, C \text{ 恰好有两个发生}\} = AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC.$

(3) $\{A, B, C \text{ 都发生}\} = ABC.$

(4) $\{A, B, C \text{ 中至少有一个发生}\} = A \cup B \cup C$
 $= A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC.$

(5) $\{A, B, C \text{ 都不发生}\} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
 $= \overline{A \cup B \cup C} \text{ (}\{A, B, C \text{ 中至少有一个发生}\} \text{ 的对立事件)}.$



$$\begin{aligned}(6) \{A, B, C \text{ 中不多于两个发生}\} &= \overline{ABC} \\ &= \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \text{ (} A, B, C \text{ 中至少有一个不发生)} \\ &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup ABC\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(7) \{A, B, C \text{ 中至少有两个发生}\} &= AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC \\ &= AB \cup AC \cup BC \text{ (} AB, AC, BC \text{ 中至少有一个发生)}.\end{aligned}$$

例4表明, 有些事件直接表示时要考虑的情况比较多, 较复杂, 通常先考虑其对立事件, 其中 (5) 和 (6) 正是德摩根律, 今后很有用. 例4还表明, 同一事件的表示方法往往不是唯一的.



§ 1.2 频率与概率

我们把表示事件发生的可能性大小的实数称为事件的**概率**.
概率越大表示可能性越大. 先介绍一个计算概率的近似方法.

一、频率

定义1 在相同的条件下进行了 n 次试验, 在这 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**, 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**, 记为 $f_n(A)$.

当试验次数 n 固定时, 频率有如下性质: **证明见**  **P6**

$$(1) 0 \leq f_n(A) \leq 1; \quad (2) f_n(\Omega) = 1, f_n(\emptyset) = 0;$$

(3) 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_l$ 两两互不相容, 则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_l).$$



频率 $f_n(A)$ 越大, 事件 A 在一次试验中发生的可能性就越大. 大量试验证实,
当重复试验的次数逐渐增大时, 频率呈现出稳定性, 逐渐稳定于某个常数.
这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性. 历史上有许多人做过抛硬币这个试验, 他们的试验结果见表1-1.

表1-1 抛硬币的试验结果

试验者	试验次数	正面朝上的频数	正面朝上的频率
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	6019	0.5016
K. Pearson	24000	12012	0.5005
Romanovsky	80640	40173	0.4982





从表1-1中的数据可以看出: 硬币正面朝上的频率逐渐稳定于0.5.

在处理实际问题时, 通常我们是用试验次数 n 足够大时的频率 $f_n(A)$ 作为事件 A 的概率的一个近似值, 并且称频率为概率的估计值.

例如, 一个射手射击 500 次, 中靶 200 次, 我们就说他中靶的概率是0.4. 这种计算概率的近似方法具有理论上和应用上的缺点. 因为我们没有理由认为, 取试验次数为 $n+1$ 来计算频率, 总会比取试验次数为 n 来计算频率更准确、更逼近所求的概率. 在实际应用上, 我们不知道 n 取多大才行, 如果 n 要很大, 我们不一定能保证每次试验的条件都完全一样 (如射手射击1000次, 很难保证每次射击时的条件都完全一样). 另外我们不可能对每一个事件都做大量的试验.

由频率的稳定性和频率的性质容易理解下面的三条公理, 我们给出概率的公理化定义.



二、概率的定义

定义2 设 Ω 为样本空间, 对每一个事件 $A \subset \Omega$, 有一个实数 $P(A)$ 与之对应, 如果实值集合函数 $P(\cdot)$ 满足以下三个条件:

- (1) **(非负性)** 对每一个事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- (2) **(规范性)** $P(\Omega) = 1$;
- (3) **(可列可加性)** 对 Ω 中任意可列个两两互不相容的事件

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 即 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$,

有 $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$, 则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.



条件 (1) (2) (3) 称为概率的公理化条件.

以后讨论的概率 P 都满足公理化条件.

概率的公理化定义刻画了概率的本质, 概率是集合 (事件) 的函数.

如果用 $\mathcal{F}$ 表示样本空间 Ω 的事件的全体, 用 P 表示概率,

那么称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间.

三、概率的基本性质

性质1 $P(\emptyset) = 0$.  P8

性质2 (有限可加性) 设事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad \text{P8}$$



性质3 对任意事件 A , 有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.  P8

性质4 对任意两个事件 A, B , 有 $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$.

证 $A = AB \cup A\bar{B}$, 且 $(AB)(A\bar{B}) = \emptyset$,  P5例2

由有限可加性得 $P(A) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B})$.

易知 $P(\bar{A}) = P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B})$, $P(\bar{B}) = P(\bar{B}A) + P(\bar{B}\bar{A})$.

性质4是将一个事件的概率划分为两个互不相容的事件的概率之和.

性质4与下面的减法公式是等价的.

性质5 (减法公式) 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB).$$



特别地, 当 $B \subset A$ 时, $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

易知, 对任意三个事件 A, B, C , 有 $P(AB) = P(ABC) + P(AB\bar{C})$,

所以 $P(AB - C) = P(AB\bar{C}) = P(AB) - P(ABC)$.

例 1 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$. (1) 若 $P(AB) = \frac{1}{8}$, 求 $P(\bar{A}B)$;
(2) 若 A 与 B 互不相容, 求 $P(\bar{A}B)$; (3) 若 $A \subset B$, 求 $P(\bar{A}B)$.

解 (1) $P(\bar{A}B) = P(B - A) = P(B) - P(AB) = \frac{3}{8}$;

(2) A 与 B 互不相容, 即 $AB = \emptyset$, $P(\bar{A}B) = P(B - A) = P(B) = \frac{1}{2}$;

(3) 当 $A \subset B$ 时, $P(\bar{A}B) = P(B - A) = P(B) - P(A) = \frac{1}{6}$.



例 2 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) = 0.7, P(A - B) = 0.3$, 求 $P(\overline{AB})$.

解 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$, 得 $P(AB) = 0.4, P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 0.6$.

性质6 (单调性) 对任意两个事件 A, B , 若 $B \subset A$, 则 $P(B) \leq P(A)$.  **P9**

例如, 对任意三个事件 A, B, C ,

由 $A \subset A \cup B \cup C$, 知 $P(A \cup B \cup C) \geq P(A)$.

由 $ABC \subset AB \subset A$, 知 $P(ABC) \leq P(AB) \leq P(A)$.

性质7 对每个事件 A , 有 $0 \leq P(A) \leq 1$.

性质8 (加法公式) 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad \text{P9}$$



性质8 还能推广到多个事件的情形. 例如, 对任意三个事件 A, B, C ,

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B)C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \end{aligned}$$

对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 可以用数学归纳法证得 (了解)

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \\ &\quad \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} P(A_i A_j A_k A_l) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n). \end{aligned}$$

例 2 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) = 0.2, P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$, 求 $P(B)$.



解 $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = P(AB),$
故 $P(B) = 0.8.$

例 4 设 A, B, C 为三个事件,

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = P(BC) = 0, P(AC) = \frac{1}{8}.$$

求 A, B, C 中至少有一个发生的概率及 A, B, C 都不发生的概率.

解 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
 $= \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + P(ABC),$ 因为 $P(AB) = 0$, 且 $ABC \subset AB$, 所以 $0 \leq P(ABC) \leq P(AB) = 0,$

即 $P(ABC) = 0$, 故 $P(A \cup B \cup C) = \frac{5}{8}.$ $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$



推论 (了解) 对任意两个事件 A, B , 有

$$(1) P(A \cup B) \leq P(A) + P(B); (2) P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1. \quad \text{📖 P10}$$

对任意 n 个事件, 利用数学归纳法可得 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leq \sum_{j=1}^n P(A_j)$;
 $P(A_1 A_2 \cdots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1).$

性质9 若事件 $A_n \subset A_{n+1} (n=1, 2, \cdots)$, 则 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$ 📖 P10

性质10 若事件 $A_n \supset A_{n+1} (n=1, 2, \cdots)$, 则 $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$ 📖 P10

性质9和性质10了解, 其应用见 §2.3.



练✎P37-9. 设 A, B 为任意两个事件, 则 ()

(A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$. (B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$.

(C) $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$. (D) $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

9.答案:(C)

解 由§1.2 性质6, $P(AB) \leq P(A), P(AB) \leq P(B), 2P(AB) \leq P(A) + P(B)$.

✎P37-7. 设 A, B, C 为随机事件, $P(A) = 1/2, P(B) = 1/3, P(C) = 1/5,$

$P(AB) = 1/10, P(AC) = 1/15, P(BC) = 1/20, P(ABC) = 1/30.$

求 $P(\bar{A}B), P(\bar{A}\bar{B}C), P(A \cup B \cup C), P(A \cup B), P(\bar{A}\bar{B}), P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}), P(\bar{A}\bar{B} \cup C).$

(补充题) 并求 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C).$

7.答案: $\frac{7}{30}, \frac{7}{60}, \frac{17}{20}, \frac{11}{15}, \frac{4}{15}, \frac{3}{20}, \frac{7}{20}.$

补充题答案见下页



(补充题) 解法1: $P(A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) = P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C)$, 

其中 $P(A\bar{B}\bar{C}) = P\left(A(\overline{B \cup C})\right) = P(A - (B \cup C))$

$$= P(A) - P(AB \cup AC) = P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) = \frac{11}{30},$$

$$P(\bar{A}B\bar{C}) = P\left(B(\overline{A \cup C})\right) = P(B - (A \cup C))$$

$$= P(B) - P(BA \cup BC) = P(B) - P(AB) - P(BC) + P(ABC) = \frac{13}{60};$$

$$P(\bar{A}\bar{B}C) = P\left(C(\overline{A \cup B})\right) = P(C - (A \cup B))$$

$$= P(C) - P(CA \cup CB) = P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \frac{7}{60},$$

$$\text{故 } P(A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) = \frac{11}{30} + \frac{13}{60} + \frac{7}{60} = \frac{7}{10}.$$





(补充) 解法2:

$$\begin{aligned} & P(\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - 2P(AB) - 2P(AC) - 2P(BC) + 3P(ABC) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 2 \times \frac{1}{10} - 2 \times \frac{1}{15} - 2 \times \frac{1}{20} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$



§ 1.3 古典概型

如果试验的样本空间 Ω 只有有限个样本点, 且每个样本点发生的可能性相同, 这种试验称为古典概率模型, 简称古典概型, 或等可能概型.

设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$. 由于基本事件是两两互不相容的, 于是

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{j=1}^n \{\omega_j\}\right) = \sum_{j=1}^n P(\omega_j) = nP(\{\omega_j\}), \quad P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

若事件 $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\} \subset \Omega$, 这里 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 是 $1, 2, \dots, n$ 某 k 个不同的数, 即事件 A 含有 k 个样本点, 则



$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^k \{\omega_{i_j}\}\right) = \sum_{j=1}^k P(\{\omega_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 中的样本点个数}}{\Omega \text{ 中的样本点个数}},$$

并称 $P(A)$ 为**古典型概率**.

在古典概型下计算事件 A 的概率时,先计算样本空间 Ω 中样本点的个数,然后计算事件 A 中样本点的个数. 特别要注意, Ω 中每个样本点发生的可能性必须相同,这时 A 中的样本点发生的可能性也相同.

例如,抛一枚均匀的硬币,样本空间 $\Omega = \{H, T\}$ 中有2个样本点.

$A = \{H\}, B = \{T\}$ 各有1个样本点,故 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}$.

也就是说,硬币正面朝上的概率等于硬币反面朝上的概率,都是0.5.



掷一枚均匀的骰子, 样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

用 $A = \{j\}$ 表示“掷出点数 j ”, $B = \{2, 4, 6\}$ 表示“掷出偶数点”.

则有 $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

例 1 考察有两个小孩的家庭. 事件 $A = \{\text{家中一个男孩一个女孩}\}$,

$B = \{\text{家中大的是男孩, 小的是女孩}\}$. 求 $P(A)$ 和 $P(B)$.

解 样本空间为 $\Omega = \{(\text{男, 男}), (\text{男, 女}), (\text{女, 男}), (\text{女, 女})\}$.

$A = \{(\text{男, 女}), (\text{女, 男})\}, B = \{(\text{男, 女})\}$, 故 $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}$.

在解决古典概型的问题时, 除非特殊需要, 一般不必把样本空间或事件用集合表达出来. 在古典概型的计算中经常用到下面的**计数原理**.



1. **加法原理**: 若一件事可用 k 类方式之一去完成, 第 j 类方式有 m_j 种方法, $j = 1, 2, \dots, k$, 则完成此事共有 $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ 种方法.
2. **乘法原理**: 若完成一件事需要分成 k 个步骤, 做第 j 步有 m_j 种方法, $j = 1, 2, \dots, k$, 则完成此事共有 $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ 种方法.
3. 从 n 个不同的元素中取出 m 个来**进行排列**, 这时既要考虑到取出的元素也要顾及其取出顺序. **这个排列相当于一次取 1 个元素, 共取 m 次.** 考虑两类抽取方式: 一类是**放回抽样**, 这时每次选取都是在全体元素中进行, 同一元素可被重复选中; 另一类是**不放回抽样**, 这时一个元素一旦被取出便立刻从全体元素中除去, 因此每个元素至多被选中一次.

对于不放回抽样, 必有 $m \leq n$.

(1) 在放回抽样中, 从 n 个不同的元素中取出 m 个元素进行排列, 称之为**有重复的排列**, 共有 $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m \uparrow} = n^m$ 种不同的取法.

(2) 在不放回抽样中, 从 n 个不同的元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素进行排列, 称之为**选排列**, 共有 $n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!} = A_n^m$ 种不同的取法. $A_n^n = n!$, 称为**全排列**. $A_n^1 = n$, 规定: $0! = 1$. $j = 1, 2, \cdots, k,$

4. 从 n 个不同的元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素, **不考虑其次序地组成一组,**

称为**组合**, 共有 $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{m!} = C_n^m$ 种不同的取法.

注意, 排列与次序有关, 组合与次序无关.

我们恒规定：当 $k > n$ 时, $C_n^k = 0$, $C_0^0 = 1$, $A_n^k = 0$.

易知 $C_n^{n-m} = C_n^m$, $C_n^n = C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $A_n^m = m!C_n^m$, $C_{m+n}^k = \sum_{j=0}^k C_m^j C_n^{k-j}$. P43-86.

对任意实数 α 以及非负整数 r , 定义 $\binom{\alpha}{r} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}$, $\binom{\alpha}{0} = 1$.

当 α 为正整数 n 时, $\binom{n}{r} = C_n^r$. 因而 $\binom{\alpha}{r}$ 是组合数的推广.

5. (了解) 将 n 个不同的元素分成有次序的 k 组, 不考虑每组中元素的次序, 第 j ($1 \leq j \leq k$) 组恰有 n_j 个元素的不同结果数是

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdots C_{n_k}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}, \text{ 其中 } \sum_{j=1}^k n_j = n. \quad \text{当随机分组时, 得到的不同结果是等可能的.}$$



无特殊声明时,今后所述的硬币、骰子等都是均匀的,所说的**任取**、**随机抽取**都是指**等可能地抽取**.

例 4 袋中有 5 个白球, 4 个黑球. 考虑下列取球方式:

(1) 有放回地从袋中取 3 次, 每次取 1 个球;

(2) 不放回地从袋中取 3 次, 每次取 1 个球;

(3) 从袋中任取 3 个球. 事件 $A = \{\text{取出的球中有 2 个黑球 1 个白球}\}$.

分别就 (1) (2) (3) 三种情况求 $P(A)$.

解 (1) 从 9 个球中有放回地取 3 次, 每次取 1 个球, 共有 9^3 种取法, 每种取法是一个样本点. 因为取球是按次序抽取的, 事件 A 共有

$$4 \times 4 \times 5 + 4 \times 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 4 = C_3^2 (4^2 \times 5) \text{ 种取法, 故 } P(A) = \frac{C_3^2 \times 4^2 \times 5}{9^3} = \frac{80}{243}$$



(2) 从 9 个球中不放回地取 3 次, 每次取 1 个球, 共有 $9 \times 8 \times 7$ 种取法.

注意取球是按次序抽取的,

事件 A 共有 $C_3^2 (4 \times 3 \times 5)$ 种取法, 故 $P(A) = \frac{(4 \times 3 \times 5) \times C_3^2}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5}{14}$

(3) 从 9 个球中任取 3 个球而不考虑其次序, 共有 C_9^3 种取法.

事件 A 共有种 $C_4^2 C_5^1$ 取法, 故 $P(A) = \frac{C_4^2 C_5^1}{C_9^3} = \frac{6 \times 5}{84} = \frac{5}{14}$.

注 注意到 (2) 和 (3) 的概率相同. 尽管 (2) 中取球是按次序抽取的, 但如果所考虑的事件只涉及球的颜色而不涉及取球的次序时, 则

“不放回地取 3 次, 每次取 1 个球”的概率与“任取 3 个球”的概率, 计算方法可以相同, 即 (2) 可以像 (3) 那样用“组合”来计算样本空间 Ω 中样本点的个数以及事件 A 中样本点的个数. 显然 (3) 计算更方便.



例 5 袋中有 a 个白球, b 个黑球, 现不放回地从袋中一次一次地取 1 个球.

(1) 求第 j 次取到的是白球的概率 ($j = 1, 2, \dots, a + b$);

(2) 求第 j 次才取到白球的概率 ($j \leq b + 1$);

(3) 求前 j 次中能取到白球的概率 ($j \leq b$).

解 只考虑前 j 次取球的模型. 从 $a + b$ 个球中不放回地取 j 次, 每次取 1 个球, 共有 $(a + b)(a + b - 1) \cdots [a + b - (j - 1)] = A_{a+b}^j$ 种取法, 每种取法是一个样本点.

(1) 设 $A = \{\text{第 } j \text{ 次取到的是白球}\}$. 当事件 A 发生时, 第 j 次取到的白球可以是 a 个白球中的任意一个, 有 a 种取法; 而另外 $j - 1$ 次取球相当于从其余 $a + b - 1$ 个球中不放回地取出 $j - 1$ 个进行排列, 有 A_{a+b-1}^{j-1} 种取法,



所以事件 A 共有 $a \cdot A_{a+b-1}^{j-1}$ 种取法. 故

$$P(A) = \frac{a \cdot A_{a+b-1}^{j-1}}{A_{a+b}^j} = \frac{a}{a+b}, j = 1, 2, \dots, a+b.$$

(2) 设 $B = \{\text{第 } j \text{ 次才取到白球}\}$. $P(B) = \frac{a \cdot A_b^{j-1}}{A_{a+b}^j}$.

(3) 设 $C = \{\text{前 } j \text{ 次中能取到白球}\}$. 直接考虑事件 C 比较复杂,
先考虑其对立事件 $\bar{C} = \{\text{前 } j \text{ 次中不能取到白球}\}$,
当事件 $\bar{C}$ 发生时, 前 j 次是在 b 个黑球中不放回地取出 j 个进行排列,
共有 A_b^j 种取法. 所以 $P(\bar{C}) = \frac{A_b^j}{A_{a+b}^j}$.



注意, 尽管取球是按次序抽取的, 但事件 $\bar{C} = \{\text{前 } j \text{ 次中不能取到白球}\}$ 只涉及球的颜色而不涉及取球的次序, 此时 “不放回地取 j 次, 每次取 1 个黑球” 的概率与 “任取 j 个黑球” 的概率, 计算方法可以相同, 因此

$$P(\bar{C}) = \frac{C_b^j}{C_{a+b}^j}. \quad \text{故 } P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{A_b^j}{A_{a+b}^j} = 1 - \frac{C_b^j}{C_{a+b}^j}.$$

从本例 (1) 可以看出, 无论哪一次抽取, 每次取到白球的概率都是一样的, 这一结果说明了生活中 “**抽签与顺序无关**” 的有趣现象. 例如在体育比赛中进行抽签, 每个队伍抽到 “好签” 的概率相同, 不会因为抽签的先后次序而导致不公平, 即 **抽签是公平的**. 我们将这一结果称为**抽签原理**, 即

$$P\{\text{第 } j \text{ 次取到的是白球}\} = P\{\text{第 1 次取到的是白球}\}, \text{ 与 } j \text{ 无关.}$$



抽签原理是值得牢记的. 另外, 在放回抽样的情况下, 易知

$$P\{\text{第 } j \text{ 次取到的是白球}\} = \frac{a \cdot (a+b)^{j-1}}{(a+b)^j} = \frac{a}{a+b}, \text{ 也与抽取次序 } j \text{ 无关.}$$

例 6 小明带有 5 把钥匙, 其中有一把能开房门上的锁, 但忘记了是哪一把, 于是逐把钥匙试开. 求恰好在第 2 次试开时打开房门的概率 p .

解 将这 5 把钥匙看成是 1 个白球 (能开门锁的钥匙) 和 4 个黑球.

由抽签原理知 $p = \frac{1}{5}$.

例4、例5、例6属于袋中取球问题.



例 7 将 n 个球随机地放入 N ($N \geq n$) 个盒子中, 盒的容量不限. 求:

- (1) 指定的 n 个盒子中各放一个球的概率 p_1 ;
- (2) 每个盒子至多有一个球的概率 p_2 ;
- (3) 某一个指定的盒子不空的概率 p_3 ;
- (4) 某一个指定的盒子恰有 k ($k \leq n$) 个球的概率 p_4 .

解 每一个球都可以放入 N 个盒子中的任意一个盒子, 将 n 个球随机地放入 N 个盒子中, 共有 $\underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{n \uparrow} = N^n$ 种不同的放法, 每种放法是一个样本点.

- (1) 将 n 个球随机地放入指定的 n 个盒子, 每个盒子各放一个球, 共有 $n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ 种不同的放法, 故 $p_1 = \frac{n!}{N^n}$.



(2) 每个盒子至多有一个球共有 $N(N-1)(N-2)\cdots[N-(N-1)] = A_N^n$ 种不同的放法. 注意 $A_N^n = C_N^n \cdot (n!)$, 故

$$p_2 = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots[N-(n-1)]}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n} = \frac{C_N^n \cdot (n!)}{N^n}.$$

(3) 某一个指定的盒子不空, 即该指定的盒子中至少有一个球. 直接考虑该事件比较复杂, 先考虑其对立事件“指定的盒子是空的”, 它等价于将 n 个球全部随机地放入其余 $N-1$ 盒子中, 共有 $(N-1)^n$ 种放法, 故

$$p_3 = 1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}.$$



(4) 先从 n 个球中任取 k 个球 (有 C_n^k 种取法) 放入指定的盒子中, 然后将其余 $n-k$ 个球随机地放入其余 $N-1$ 个盒子中 (有 $(N-1)^{n-k}$ 种放法), 于是某一个指定的盒子恰有 k 个球共有 $C_n^k (N-1)^{n-k}$ 种放法, 故

$$p_4 = \frac{C_n^k (N-1)^{n-k}}{N^n}.$$

例 8 全班有 n 个同学, 求:

- (1) 至少有一个同学的生日在今天的概率 q_n ;
- (2) 至少有两个同学的生日相同的概率 $p_n (n \leq 365)$.



解 例8 和例7 具有相同的数学模型, 属于放球进盒问题.

将 n 个同学看成是 n 个球, 将一年 365 天看成是 365 个盒子, 认为每个人生日在一年 365 天中的任一天是等可能的.

(1) 设 $A = \{\text{没有一个人的生日在今天}\}$, 则 $P(A) = 364^n / 365^n$,

故 $q_n = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - (364/365)^n$.

对于不同的 n , 可以计算出下面的结果:

n	50	60	80	100	300	600	900
q_n	0.128	0.152	0.197	0.240	0.561	0.807	0.915



(2) 设 B 表示 “ n 个人的生日全不相同” , 则

$$P(B) = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times [365 - (n-1)]}{365^n} = \frac{A_{365}^n}{365^n},$$

$$p_n = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}.$$

对于不同的 n , 可以计算出下面的结果:

n	20	30	40	50	60	70	80
q_n	0.411	0.706	0.891	0.970	0.994	0.999	0.9999

从上述结果可看出,

全班有50个同学时, 我们以97%的把握保证至少有两个人生日相同.

全班有60个同学时, 我们以99.4%的把握保证至少有两个人生日相同.



比较例 8 (1) 和 (2) 中的结论时, 你会发现
对于指定的一天, 300 个人中有人在这一天过生日的概率约为0.561,
而50个人中至少有两人同一天生日的概率已经达到了0.97.
这样的差异和我们的直觉并不一致, 说明直觉并不总是可靠.

例 11 (了解) 某接待站在某一周曾接待过 12 次来访, 已知所有这 12 次接待都是在周二和周四进行的, 是否可以推断接待时间是有规定的?

解 假设接待站的接待时间没有规定, 而各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的, 那么12 次接待来访者都在周二、周四的概率为



$$\frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.00000003.$$

人们在长期的实践中总结得到“**概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的**”，称为**实际推断原理**。

现在概率很小的事件在一次试验中竟然发生了，因此有理由怀疑假设的正确性，从而推断接待站不是每天都接待来访者，即认为其接待时间是有规定的。



§ 1.4 条件概率

一、条件概率的概念

在实际问题中,除了考虑事件 B 的概率,还需考虑在“**已知事件 A 已经发生**”的条件下,事件 B 发生的概率.一般地,后者与前者未必相同.为了区别起见,我们把后者称为**条件概率**,记为 $P(B|A)$ 或 $P_A(B)$.

例 1 设样本空间 Ω 含有 25 个等可能的样本点,事件 A 含有 7 个样本点,事件 B 含有 15 个样本点,事件 AB 含有 5 个样本点,则

$$P(A) = \frac{7}{25}, P(B) = \frac{15}{25}, P(AB) = \frac{5}{25}.$$



下面按条件概率的含义来计算例1 中的 $P(B|A)$.

已知事件 A 已经发生, 则知试验的可能结果为 A 中的 1 个样本点.

这一信息表明 $\bar{A}$ 不可能发生, 即不在 A 中的 18 个样本点就不可能出现了,

因此 $\bar{A}$ 中的 18 个样本点可以不予考虑. 此时试验所有可能结果所组成的集

合就是 A . 这意味着, 已知 A 发生后试验的样本空间发生了变化,

在计算条件概率 $P(B|A)$ 时新的样本空间就是 A .

A 中共有 7 个样本点, 其中属于 B (导致 B 发生) 的只有 5 个,

即 AB 中只有5个样本点, 见图1-2, 故 $P(B|A) = \frac{5}{7} = \frac{AB \text{ 中的样本点个数}}{A \text{ 中的样本点个数}}$



在本例中, 我们看到 $P(B|A) \neq P(B)$. 因为在求 $P(B|A)$ 时我们是限制在事件 A 已经发生的条件下考虑事件 B 发生的概率的. 注意到

$$P(B|A) = \frac{5}{7} = \frac{5/25}{7/25} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

由上式启发, 我们给出条件概率 如下的定义.

定义 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$,

称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为

在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的条件概率, 简称条件概率.

当 $P(A) = 0$ 时, 条件概率 $P(B|A)$ 没有定义.

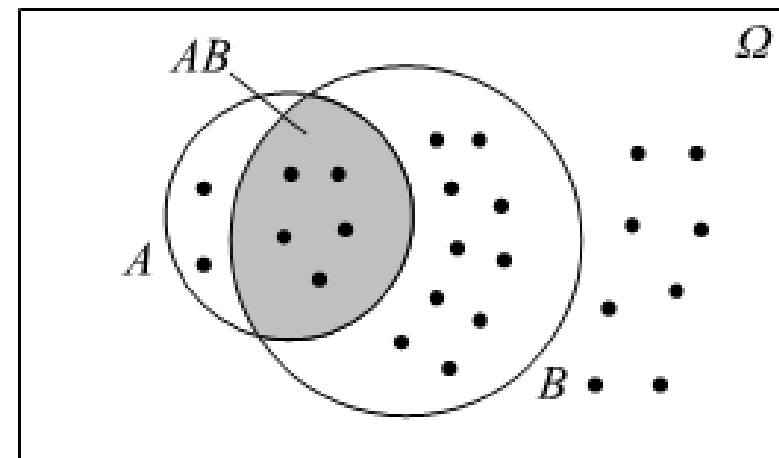


图1-2

条件概率 $P(B|A)$ 也是概率, 满足概率的公理化条件, 因此概率的基本性质都适用于条件概率.

例 2 对任意三个事件 A, B, C , 证明 $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$,

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - P(B|\bar{A}), P(A - B|C) = P(A|C) - P(AB|C).$$

证
$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(A\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A - B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = 1 - P(B|A),$$

同理可证 $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - P(B|\bar{A})$.

$$\begin{aligned} P(A - B|C) &= P(A\bar{B}|C) = \frac{P(A\bar{B}C)}{P(C)} = \frac{P(AC - B)}{P(C)} = \frac{P(AC) - P(ACB)}{P(C)} \\ &= P(A|C) - P(AB|C). \end{aligned}$$



例 3 设 A, B, C 为三个事件, 且 A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, 求 $P(AB|\bar{C})$.

解
$$P(AB|\bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(AB - C)}{1 - P(C)} = \frac{P(AB) - P(ABC)}{1 - P(C)},$$

因为 A 与 C 互不相容, 即 $AC = \emptyset$, 则 $P(AC) = 0$, 由 $0 \leq P(ABC) \leq P(AC) = 0$,

可知 $P(ABC) = 0$, 所以
$$P(AB|\bar{C}) = \frac{1/2 - 0}{1 - 1/3} = \frac{3}{4}.$$

在计算条件概率时, 用 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 有时会带来许多方便.

但有时按条件概率的含义来计算 $P(B|A)$ 可以直接得到结果.



例 4 有 5 件产品, 其中 3 件合格品, 2 件次品. 现不放回地从中取 2 次, 每次取 1 件. 设 $A_k = \{\text{第 } k \text{ 次取出的是合格品}\} (k = 1, 2)$, 求 $P(A_2 | A_1)$.

解 将产品编号, 1 号、2 号、3 号为合格品, 4 号、5 号为次品. 从中不放回取 2 次, 记录其号码, 用 (j, l) 表示第 1 次、第 2 次分别取出第 j 号、第 l 号产品, 样本空间为 $\Omega = \{(j, l) | j \neq l, j, l = 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$A_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5)\},$$

$$A_1 A_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}.$$

按条件概率的含义, 当事件 A_1 发生以后, 此时试验所有可能结果所组成的集合就是 A_1 , A_1 中共有 12 个样本点, 其中属于 A_2 的只有 6 个, 故

$$P(A_2 | A_1) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$



本例还可以从另一种观点来考虑:

已知事件 A_1 发生后, 即第 1 次取到的是合格品的条件下,

由于不放回, 第 2 次取产品就在剩下的 4 件产品中任取 1 个.

而在这剩下的 4 件产品中合格品还有 2 件, 故 $P(A_2 | A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

若题目中 $k = 1, 2, 3$, 类似地, 可以直接算得

$$P(\bar{A}_2 | A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{3}{4}, P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) = \frac{1}{4},$$

$$P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{1}{3}, P(\bar{A}_3 | A_1 A_2) = \frac{2}{3}$$



一、乘法公式

定理1 (乘法公式)

(1) 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 则 $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

(2) 设 A, B 是两个事件, 且 $P(B) > 0$, 则 $P(AB) = P(B)P(A|B)$.

(3) 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) 是 n 个事件, 且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}). \quad \text{P20}$$

例 6 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 求 $P(B)$.

解 $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B), \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = P(B) \times \frac{1}{2}, \text{故 } P(B) = \frac{1}{6}.$



例 7 设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下时打破的概率为 $\frac{1}{2}$, 若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为 $\frac{7}{10}$, 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为 $\frac{9}{10}$. 求透镜落下三次而未打破的概率.

解 设 $A_k = \{\text{透镜第 } k \text{ 次落下时打破}\} (k = 1, 2, 3)$,

则 $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 = \{\text{透镜落下三次而未打破}\}$. 由题意知

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{7}{10}, P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) = \frac{9}{10}, \quad \text{故 } P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) =$$

$$P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{7}{10}\right) \left(1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{200}.$$



本例也可以这样来求 $P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$: (了解)

$$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}, \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3, \quad \text{📖 P5例2}$$

而 $A_1, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ 两两互不相容, 所以

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3),$$

$$P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{20},$$

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1 \bar{A}_2) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{7}{10}\right) \times \frac{9}{10} = \frac{27}{200},$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{1}{2} + \frac{7}{20} + \frac{27}{200} = \frac{197}{200}, \quad P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = 1 - \frac{197}{200} = \frac{3}{200}.$$



例 8 有 5 件产品, 其中 3 件合格品, 2 件次品. 现不放回地从中取 5 次, 每次取 1 件. 设 $A_k = \{\text{第 } k \text{ 次取出的是合格品}\} (k = 1, 2, \dots, 5)$, 求:

$$(1) P(A_1 A_2), P(A_2 A_3); \quad (2) P(A_1 | A_2), P(A_3 | A_2).$$

解 (1) $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$

由 §1.2 性质4, 得 $P(A_2 A_3) = P(\textcolor{red}{A}_1 A_2 A_3) + P(\textcolor{red}{\bar{A}}_1 A_2 A_3),$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10},$$

$$P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1 A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}, \quad P(A_2 A_3) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$



(2) 由抽签原理知 $P(A_2) = \frac{3}{5}, P(A_3) = \frac{3}{5}$, 故

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}, P(A_3|A_2) = \frac{P(A_2A_3)}{P(A_2)} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}.$$

值得指出, 由 §1.2 性质4及乘法公式, 得

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1A_2) + P(\bar{A}_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_2A_3) + P(\bar{A}_2A_3) = P(A_1A_2A_3) + P(\bar{A}_1A_2A_3) + P(A_1\bar{A}_2A_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$



这与直接用抽签原理得到的结果一样. 同理可得

$$P(A_4) = P(A_5) = P(A_1) = \frac{3}{5}, \quad P(\bar{A}_5) = P(\bar{A}_4) = P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) = \frac{2}{5}.$$

注意到, 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}).$$

这是一个常用的重要公式, 可以推广到下面的全概率公式.

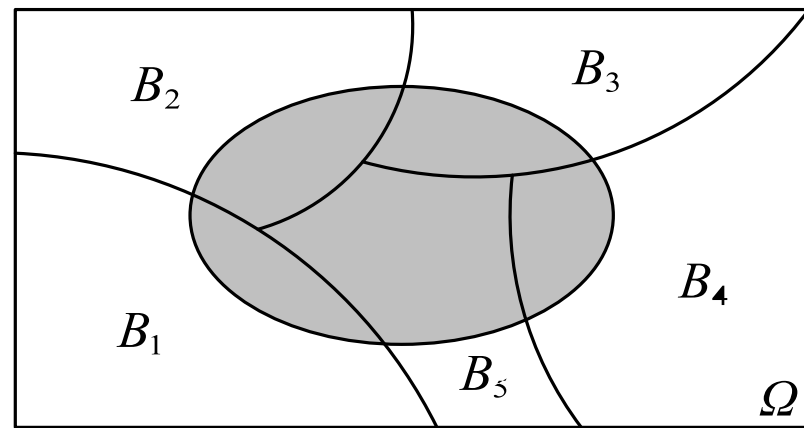


图1-3

三、全概率公式

设 Ω 为样本空间, 如果事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 两两互不相容,

且 $\bigcup_{j=1}^n B_j = \Omega$, 那么称 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一个完备事件组,

或 Ω 的一个划分. 图1-3是 $n=5$ 的划分, 其中阴影部分表示 Ω 中某一事件 A .

定理2 (全概率公式) 设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一个完备事件组,

$P(B_j) > 0 (j = 1, 2, \dots, n)$, 则对任意事件 A , 有

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_n) = \sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j). \quad \text{📖 P22}$$

当直接求 $P(A)$ 比较困难, 而事件 A 由 n 个事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 引发时, 事件 A 可表示成 $A = AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n$, 这类问题用全概率公式来计算 $P(A)$.

运用全概率公式的**关键是找出完备事件组** $B_1, B_2, \dots, B_n$, 且 $P(B_j)$ 和 $P(A|B_j)$ 或为已知, 或容易求得. **对每次试验, 完备事件组 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 中必有一个且仅有一个发生**, 并满足 $P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$.

$B, \bar{B}$ 是样本空间 Ω 的一个完备事件组. **全概率公式的最简单形式是**

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}).$$



例 9 第一个盒子装有 5 个红球, 4 个白球; 第二个盒子装有 4 个红球, 5 个白球. 先从第一盒中任取 2 个球放入第二盒中去, 然后从第二盒中任取 1 个球, 求取到白球的概率.

解 设 $A = \{\text{从第二个盒取的是白球}\}$,

$B_j = \{\text{从第一个盒取的球中有 } j \text{ 个白球}\} (j = 0, 1, 2)$. 易知 B_0, B_1, B_2 是完备事件组,

并且有 $P(B_0) = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{10}{36}$, $P(B_1) = \frac{C_4^1 C_5^1}{C_9^2} = \frac{20}{36}$, $P(B_2) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}$,

$P(A|B_0) = \frac{5}{11}$, $P(A|B_1) = \frac{6}{11}$, $P(A|B_2) = \frac{7}{11}$. 根据全概率公式, 得

$$P(A) = \sum_{j=0}^2 P(B_j) P(A|B_j) = \frac{10}{36} \times \frac{5}{11} + \frac{20}{36} \times \frac{6}{11} + \frac{6}{36} \times \frac{7}{11} = \frac{53}{99}.$$



例 10 玻璃杯成箱出售, 每箱 20 只, 假定各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率相应为 0.8, 0.1, 0.1. 客人欲购一箱玻璃杯, 在购买时, 售货员随意取一箱, 向顾客开箱随机地查看 4 只, 若无残次品, 则买下该箱玻璃杯, 否则退回. 求顾客买下该箱玻璃杯的概率.

解 设 $A = \{\text{顾客买下该箱玻璃杯}\}$,

$B_j = \{\text{所取的一箱玻璃杯含 } j \text{ 只残次品}\} (j = 0, 1, 2)$. 易知 B_0, B_1, B_2 是完备事件组, 并且有 $P(B_0) = 0.8, P(B_1) = 0.1, P(B_2) = 0.1$,

$P(A|B_0) = 1, P(A|B_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \frac{4}{5}, P(A|B_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \frac{12}{19}$. 根据全概率公式, 得

$$P(A) = \sum_{j=0}^2 P(B_j) P(A|B_j) = 0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19} \approx 0.9432.$$



例 11 在调查服用过兴奋剂的运动员在全体运动员所占的比例 p 时, 如果采用直接的问卷方式, 被调查者一般不会回答真相. 为得到实际的 p 同时又不侵犯个人隐私, 调查人员先请被调查者在心目中任意选定一个整数 (不说出), 然后请他在下面的问卷中选择回答 “是” 或 “否” .

当你选的最后一位数是奇数, 请回答: 你选的是奇数吗?

当你选的最后一位数是偶数, 请回答: 你服用过兴奋剂吗?

是

否

因为回答只在 “是” 或 “否” 中选一个, 所以没有人知道被调查者回答的是哪个问题, 更不知道他是否服用过兴奋剂. 假设运动员们随机地选定数字, 并且能按要求回答问题, 当回答 “是” 的概率为 p_1 时, 求 p .



解 对任一运动员, 设 $A = \{\text{回答“是”}\}$, $B = \{\text{选到“奇数”}\}$, 由题意知

$$P(B) = 0.5, P(\bar{B}) = 0.5, P(A|B) = 1, P(A|\bar{B}) = p.$$

根据全概率公式, 得

$$p_1 = P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = 0.5 + 0.5p, \text{ 故 } p = 2p_1 - 1.$$

实际问题中, p_1 是未知的, 需要经过调查得到. 假设调查了 n 个运动员, 其中有 k 个回答“是”. 由**频率的稳定性**, 我们可以用频率 $\hat{p}_1 = \frac{k}{n}$ 估计 p_1 , 于是

可以用 $\hat{p} = \frac{2k}{n} - 1$ 估计 p . 例如, 如果调查了 200 个运动员, 其中有 115 个运动员回答“是”, 那么 p 的估计值是 $\hat{p} = \frac{2 \times 115}{200} - 1 = 15\%$.



上面的公式和下面的直观理解是一致的: 200个人中大约有一半人是因为选中奇数才回答“是”, 所以余下的一半人中回答“是”的人才真的“是”.

于是得到 $\hat{p} = \frac{115-100}{100} = 15\%$.

例 12 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的. 根据以往的记录, 第 1 家工厂、第 2 家工厂、第 3 家工厂提供元件的份额分别占 15%, 80%, 5%, 各厂产品的次品率分别为 2%, 1%, 3%. 设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的, 且无区别的标志. 在仓库中随机地取一只元件, 求它是次品的概率.



解 设 $A = \{\text{取到的是一个次品}\}$,

$B_j = \{\text{所取到的产品是由第 } j \text{ 家工厂提供的}\} (j = 1, 2, 3).$

易知 B_1, B_2, B_3 是完备事件组, 并且有 $P(B_1) = 0.15, P(B_2) = 0.8, P(B_3) = 0.05,$

$P(A|B_1) = 0.02, P(A|B_2) = 0.01, P(A|B_3) = 0.03.$ 根据全概率公式, 得

$$P(A) = \sum_{j=1}^3 P(B_j)P(A|B_j) = 0.15 \times 0.02 + 0.8 \times 0.01 + 0.05 \times 0.03 = 0.0125.$$

继续讨论例12. 在仓库中随机地取一只元件, 若已知取到的是次品, 则此次品由第 2 家工厂生产的概率为

$$P(B_2|A) = \frac{P(AB_2)}{P(A)} = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{0.8 \times 0.01}{0.0125} = 0.64.$$



容易看出

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}.$$

我们从中得到启发, 给出另一个重要的公式.

四、贝叶斯公式

定理3 (贝叶斯 (Bayes) 公式) 设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一个完备事件组, $P(B_j) > 0 (j = 1, 2, \dots, n)$, 则对任意事件 A , 且 $P(A) > 0$, 有

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad \text{📖P24}$$



在贝叶斯公式中, 常常称 $P(B_k) (k = 1, 2, \dots, n)$ 为事件 B_k 的**先验概率**.

当我们得到了**新信息 (观察到事件 A 已发生)**, 这时对事件 B_k 有了新的认识. 所讨论的条件概率 $P(B_k | A)$ 可通过贝叶斯公式计算, 称 $P(B_k | A)$ 为 B_k 的**后验概率**.

贝叶斯公式的最简单形式是
$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}.$$

例 13 对以往数据分析结果表明, 当机器调整得良好时, 产品的合格率为 98%, 而当机器发生某种故障时, 其合格率为 55%. 每天早上机器开动时, 机器调整良好的概率为 95%.

已知某日早上第一件产品是合格品时, 求机器调整良好的概率.



解 设 $A = \{\text{产品合格}\}$, $B = \{\text{机器调整良好}\}$, 由题意知

$$P(B) = 0.95, P(\bar{B}) = 0.05, P(A|B) = 0.98, P(A|\bar{B}) = 0.55.$$

根据贝叶斯公式, 得

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} = \frac{0.95 \times 0.98}{0.95 \times 0.98 + 0.05 \times 0.55} = 0.97.$$

这就是说, 当生产出第一件产品是合格品时, 机器调整良好的概率为 0.97.

这里, 先验概率 $P(B) = 0.95$ 是由以往的数据分析得到的. 后验概率

$P(B|A) = 0.97$ 是在得到信息 (即生产出的第一件产品是合格品) 之后再重新加以修正的概率. 有了后验概率我们就能对机器的情况有进一步的了解.



例 14 在例12中, 从仓库中随机地取一只元件, 若已知取到的是次品, 为分析此次品出自哪个厂, 需求出此次品由三家工厂生产的概率分别是多少. 试求这些概率.

解 根据贝叶斯公式, 得

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{j=1}^3 P(B_j)P(A|B_j)} = \frac{0.15 \times 0.02}{0.15 \times 0.02 + 0.8 \times 0.01 + 0.05 \times 0.03} = 0.24.$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{\sum_{j=1}^3 P(B_j)P(A|B_j)} = \frac{0.8 \times 0.01}{0.15 \times 0.02 + 0.8 \times 0.01 + 0.05 \times 0.03} = 0.64.$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{\sum_{j=1}^3 P(B_j)P(A|B_j)} = \frac{0.05 \times 0.03}{0.15 \times 0.02 + 0.8 \times 0.01 + 0.05 \times 0.03} = 0.12.$$

$P(B_2|A) > P(B_1|A) > P(B_3|A)$, 这只次品来自第2家工厂的可能性最大.



例 15 假设某地区生活的人中携带某病毒的比例是十万分之一, 验血检查的准确率是 95% (患病被正确诊断和没病被正确诊断的概率都是 95%) . 甲在检查后被通知带有该病毒, 计算甲的确带有该病毒的概率.

解 设 $A = \{\text{甲被检查出携带该病毒}\}$, $B = \{\text{甲携带该病毒}\}$,

由题意知 $P(B) = 10^{-5}$, $P(\bar{B}) = 1 - 10^{-5}$, $P(A|B) = 0.95$, $P(A|\bar{B}) = 0.05$.

根据贝叶斯公式, 得

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} = \frac{10^{-5} \times 0.95}{10^{-5} \times 0.95 + (1 - 10^{-5}) \times 0.05} \approx 0.00019.$$

可见当甲被检查出携带该病毒时但不带该病毒的概率

$$P(\bar{B}|A) \approx 0.99981 > 99.9\%.$$



例15的结论说明检查出携带该病毒距离真正携带该病毒还差得很远. 也说明这样的普查没有什么实质意义. 造成这个结果的原因是发病率较低和诊断的准确性还不够高. 可以设想, 如果被检查人群中没有人携带该病毒, 那么 $P(B|A)=0$; 如果检查的正确率是 100%, 那么 $P(B|A)=1$.

正因为以上的原因, 可以说对于发病率很低的疾病进行普查意义不大, 特别是在检查的准确性也不是很高的情况下. 医生通常是了解这一点的:

在健康普查中, 如果某人被查出患病, 医生一般并不下结论, 而是要求他进行复查. 复查再确定患病, 则真患病的概率就会增加.

例 16 在例15中, 甲被查出携带该病毒后再次复查, 如果复查又被认为携带该病毒, 计算甲确实携带该病毒的概率.



解 设 $A = \{\text{甲复查出携带该病毒}\}$, $C = \{\text{甲携带该病毒}\}$,

由题意知 $P(C) = 0.00019$, $P(\bar{C}) = 0.99981$, $P(A|C) = 0.95$, $P(A|\bar{C}) = 0.05$.

根据贝叶斯公式,得

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C) + P(\bar{C})P(A|\bar{C})} = \frac{0.00019 \times 0.95}{0.00019 \times 0.95 + 0.99981 \times 0.05} \approx 0.0036.$$

现在, 当甲被复查出携带该病毒时, 甲确实携带该病毒的概率提高到0.36%.

例15和例16也告诉我们, 确诊发病率很低的疾病时应当十分慎重.

从前面的叙述我们看到, 贝叶斯公式的推导十分简单, 它只用到条件概率的定义和全概率公式, 但它对解概率问题却很有用, 而且还可用来解决许多实际问题.



贝叶斯公式的思想的发展现在已形成一套统计方法, 叫做贝叶斯统计.

下面的推论把全概率公式和贝叶斯公式进行了推广.

推论1 设事件 $B_1, B_2, \dots$ 两两互不相容, 且 $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \Omega$, 则对任意事件 A ,

$$\text{有 } P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(AB_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j)P(A|B_j).$$

$$\text{当 } P(A) > 0 \text{ 时, 有 } P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B_j)P(A|B_j)} \quad (k = 1, 2, \dots).$$



推论2

(了解)

设事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 两两互不相容, $A \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$,

$$\text{则 } P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j).$$

$$\text{当 } P(A) > 0 \text{ 时, 有 } P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

 **P39-33.** 设 A, B 为两个事件,

$$P(\bar{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\bar{B}) = 0.5, \text{ 求 } P(B|A \cup \bar{B}).$$

答案: $\frac{1}{4}$.





 **P39-48.** 将两条信息分别编码为 a 和 b 传送出去, 接收站收到时, a 被误收作 b 的概率为 0.02, 而 b 被误收作 a 的概率为 0.01, 信息 a 与信息 b 传送的频繁程度之比为 2:1. 若接收站收到的信息是 a , 求原发信息也是 a 的概率.

答案: $\frac{196}{197} \approx 0.995.$



§ 1.5 事件的独立性

一、两个事件的独立性

袋中有 3 个白球, 2 个黑球. 现从袋中取两次, 每次取 1 个球. 设

$A = \{\text{第1次取出的是白球}\}, B = \{\text{第2次取出的是白球}\}.$

在不放回抽样中, $P(B|A) = \frac{2}{4}, P(B) = \frac{3}{5}.$

这里 $P(B|A) \neq P(B)$, 说明事件 A 的发生对事件 B 发生的概率有影响.

在放回抽样中, 容易算得 $P(B|A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{3}{5}, P(A) = \frac{3}{5}, P(A|B) = \frac{3}{5}.$

这里 $P(B|A) = P(B)$, 说明事件 A 的发生不影响事件 B 发生的概率, 称事件 B 独立于事件 A . $P(A|B) = P(A)$, 说明事件 B 的发生不影响事件 A 发生的概率, 称事件 A 独立于事件 B .



袋中有 3 个白球, 2 个黑球. 现从袋中取两次, 每次取 1 个球. 设
当 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ 时, $P(B|A) = P(B)$ 和 $P(A|B) = P(A)$ 均等价于

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

因此, 事件 A 与事件 B 之间的独立性具有相互对称性质, 称它们相互独立.

当 $P(A) = 0$ 时, 由 $0 \leq P(AB) \leq P(A) = 0$, 可知 $P(AB) = 0$.

从而当 $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$ 时, 恒有 $P(AB) = P(A)P(B)$.

定义1 设 A, B 是两个事件, 如果 $P(AB) = P(A)P(B)$,
那么称事件 A 与 B **相互独立**, 简称**独立**.

当 $P(AB) \neq P(A)P(B)$ 时, 称事件 A 与 B 不相互独立.



性质1 若 $P(A) = 0$, 则 A 与任何事件 B 相互独立.

若 $P(A) = 1$, 则 A 与任何事件 B 相互独立.  **P27**

显然, 不可能事件 $\emptyset$ 与任何事件独立, 必然事件 Ω 与任何事件独立.

性质2 若事件 A 与 B 相互独立, 则 A 与 $\bar{B}$ 相互独立,
 $\bar{A}$ 与 B 相互独立, $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立.  **P27**

性质3 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$,
则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是: $P(B|A) = P(B)$.

性质4 设 A, B 是两个事件, 且 $0 < P(A) < 1$,
则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是: $P(B) = P(B|A) = P(B|\bar{A})$.



证 $P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

$$P(B|A) = P(B|\bar{A}) \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)}$$

$$\Leftrightarrow P(AB) - P(AB)P(A) = P(A)P(B) - P(A)P(AB) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B).$$

注意, $P(B) = P(B|A) = P(B|\bar{A})$. 说明事件 A 发生与否**不影响**事件 B 发生的概率. 两个事件相互独立的含义是**它们中一个事件已发生不影响另一个事件发生的概率.**

在实际应用中, 两个事件的独立性大多是根据经验 (**相互有无影响**) 来判断的. 一般地, 放回抽样中, 各次抽取对应的事件独立. 不放回抽样中, 各次抽取对应的事件不独立. 有时也用定义来判断两个事件的独立性.



例 1 设甲、乙两射手独立地同时向同一目标各射击一次, 他们击中目标的概率分别为 0.9 和 0.8. 求目标被击中的概率.

解 设 $A = \{\text{甲击中目标}\}$, $B = \{\text{乙击中目标}\}$,

则 $A \cup B = \{\text{目标被击中}\}$, 且 A 与 B 独立, $P(A) = 0.9, P(B) = 0.8$.

故 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$
 $= 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8 = 0.98$.

例 2 设事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(A) = 0.2, P(A \cup B) = 0.8$.

求 $P(B), P(A - B), P(\bar{A} \cup \bar{B})$.



解 因为 A 与 B 独立, 所以 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 独立, A 与 $\bar{B}$ 独立.

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - 0.8P(\bar{B}) = 0.8,$$

$$\text{得 } P(\bar{B}) = 0.25, P(B) = 0.75.$$

$$P(A - B) = P(A \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0.2 \times 0.25 = 0.05.$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.2 \times 0.75 = 0.85.$$

例 3 设事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, 求 $P(A - B | \bar{B})$.

$$\text{解 } P(A - B | \bar{B}) = P(A \bar{B} | \bar{B}) = \frac{P(A \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A)P(\bar{B})}{P(\bar{B})} = P(A) = 0.5.$$



例 4 设 A, B 是两个事件, $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, $P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$,
问 A 与 B 是否相互独立? A 与 B 是否互不相容?

解 $P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|\bar{B}) = P(A|\bar{B})$, 由性质4知 A 与 B 相互独立.

又 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, 所以 $P(AB) = P(A)P(B) > 0$,

假设 A 与 B 互不相容, 即 $AB = \emptyset$, 则 $P(AB) = 0$. 这与本例中 $P(AB) > 0$ 矛盾.

所以在本例中, A 与 B **不是**互不相容的.

注意, 若 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$,

“ A 与 B 互不相容”, “ A 与 B 相互独立” 不能同时成立.



二、多个事件的独立性

定义2 设 A, B, C 是三个事件, 如果满足以下两个条件:

$$(1) P(AB) = P(A)P(B), P(BC) = P(B)P(C), P(AC) = P(A)P(C);$$

$$(2) P(ABC) = P(A)P(B)P(C);$$

称 A, B, C **相互独立**.

若 A, B, C 只满足条件 (1), 称 A, B, C **两两独立**.

注意, 条件 (1) 成立并不能保证条件 (2) 成立,
即一组事件两两独立并不能保证这组事件相互独立, 见例5.
条件 (2) 成立并不能保证条件 (1) 成立, 见例6.



例 5 盒中有编号为 1, 2, 3, 4 的 4 只球, 随机地从盒中取 1 只球, 事件 $A = \{\text{取得的是 1 号球或 2 号球}\}$, $B = \{\text{取得的是 1 号球或 3 号球}\}$, $C = \{\text{取得的是 1 号球或 4 号球}\}$.

问 A, B, C 是否相互独立?

解 易知

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(AB) = P(BC) = P(AC) = P(ABC) = \frac{1}{4}.$$

说明 A, B, C 两两独立. 但是

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C),$$

说明 A, B, C 不相互独立.



例 6 设有一质地均匀的正八面体, 其第 1, 2, 3, 4 面染有红色; 第 1, 2, 3, 5 面染有白色; 第 1, 6, 7, 8 面染有黑色. 在桌面上将此正八面体抛掷一次, 然后观察与桌面接触的那一面出现何种颜色. 令 $A = \{\text{出现红色}\}$, $B = \{\text{出现白色}\}$, $C = \{\text{出现黑色}\}$. 问 A, B, C 是否相互独立?

解 易知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$,
 $P(A)P(B) = P(B)P(C) = P(A)P(C) = \frac{1}{4}$.
由题意知 $AB = \{\text{第 1, 2, 3 面}\}$, $AC = BC = \{\text{第 1 面}\}$, $ABC = \{\text{第 1 面}\}$, 所以
 $P(AB) = \frac{3}{8}$, $P(AC) = P(BC) = P(ABC) = \frac{1}{8}$.

尽管在本例中, 有 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$,
但是 $P(AB) \neq P(A)P(B)$, $P(AC) \neq P(A)P(C)$, $P(BC) \neq P(B)P(C)$.
这表明 A, B, C 不相互独立.



定义3 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) 是 n 个事件, 如果对其中任意 k ($2 \leq k \leq n$) 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, 有 $P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$, 其中 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 是满足条件 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ 的任意 k 个整数, 那么称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ **相互独立**.

- 从定义3可看出, 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则其中任意 k ($2 \leq k \leq n$) 个事件也相互独立.
- 定义3包含了定义1和定义2.
- 定义3中包括 $2^n - n - 1$ 个等式 (因为 $C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - n - 1$).
- n 个事件相互独立的直观含义是其中任何一些事件的发生不影响其他事件发生的概率.
- 怎样判断多个事件是否相互独立呢? 与两个事件的情形一样, 在许多情形下根据对事情本质的分析就能做出判断, 并不需要复杂的推理.



如果可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 中任意有限个事件都相互独立,
那么称可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 相互独立.

例 7 设事件 A, B, C 相互独立, 证明:

- (1) AB 与 C 相互独立, $A \cup B$ 与 C 相互独立, $A - B$ 与 C 相互独立;
- (2) $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 相互独立.

证 (1) $P((AB)C) = P(A)P(B)P(C) = P(AB)P(C).$

$$\begin{aligned} P((A \cup B)C) &= P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\ &= [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]P(C) = P(A \cup B)P(C). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P((A - B)C) &= P(A\bar{B}C) = P(AC - B) = P(AC) - P(ABC) \\ &= [P(A) - P(AB)]P(C) = P(A - B)P(C). \end{aligned}$$



(2) A, B, C 两两独立, 由性质2可知 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 两两独立. 由 (1) 知 $A \cup B$ 与 C 相互独立, 于是 $\overline{A \cup B}$ 与 $\bar{C}$ 相互独立, 即 $\bar{A}\bar{B}$ 与 $\bar{C}$ 相互独立, 所以 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P((\bar{A}\bar{B})\bar{C}) = P(\bar{A}\bar{B})P(\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$.
故 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 相互独立.

例7 还可以证明 $A, B, \bar{C}$ 相互独立, $\bar{A}, B, \bar{C}$ 相互独立等等.

结合性质2, 容易理解下面的性质.

性质5 若 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) 相互独立, 则将 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意 m ($1 \leq m \leq n$) 个事件换成各自的对立事件, 得到的 n 个事件仍相互独立.

给定一种具体情形都容易证得, 此处略.



如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) 相互独立, 由性质5, $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ 相互独立,

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n) = 1 - \prod_{j=1}^n P(\bar{A}_j).$$

例 8 三人独立地去破译一份密码, 他们能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.
求三人中至少有一人能将此密码译出的概率.

解 设 $A_j = \{\text{第 } j \text{ 人能译出密码}\}$ ($j = 1, 2, 3$), 则 A_1, A_2, A_3 相互独立,

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{\text{至少有一人能将此密码译出}\}$, 故

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$



例 9 在有 50 个人参加的登山活动中, 假设每个人意外受伤的概率是 1%, 每个人是否意外受伤是相互独立的.

- (1) 求 50 个人都没有意外受伤的概率;
- (2) 求至少有一人意外受伤的概率;
- (3) 为保证不发生意外受伤的概率大于 90%, 应如何控制参加人数?

解 设 $A_j = \{\text{第 } j \text{ 个人没有意外受伤}\} (j = 1, 2, \dots, 50)$,

则 $A_1, A_2, \dots, A_{50}$ 相互独立, $P(A_j) = 1 - 0.01 = 0.99, j = 1, 2, \dots, 50$.

$$(1) \bigcap_{j=1}^{50} A_j = \{50 \text{ 个人都没有意外受伤}\}, P\left(\bigcap_{j=1}^{50} A_j\right) = \prod_{j=1}^{50} P(A_j) = 0.99^{50} \approx 60.5\%.$$

$$(2) \bigcup_{j=1}^{50} \bar{A}_j = \{\text{至少有一人意外受伤}\}, P\left(\bigcup_{j=1}^{50} \bar{A}_j\right) = 1 - \prod_{j=1}^{50} P(A_j) \approx 1 - 0.605 = 39.5\%.$$



(3) 如果人数为 n 时可以满足要求, 那么有

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = \prod_{j=1}^n P(A_j) = 0.99^n \geq 0.90, \quad n \ln 0.99 \geq \ln 0.9, \quad n \leq \frac{\ln 0.9}{\ln 0.99} \approx 10.48.$$

所以应当控制参加人数在 10 人以内.

例9告诉我们, 在组织有多人参加的活动时, 必须要求每个人都有很高的安全可靠性的.

三、独立重复试验

若试验只考虑事件 A 发生与否, 即只考虑事件 A 和 $\bar{A}$, 则称该试验为 **伯努利 (Bernoulli) 试验**. 设 $P(A) = p (0 < p < 1)$, 则 $P(\bar{A}) = 1 - p$.



将一个伯努利试验独立重复地进行 n 次, 则称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验. 这里“重复”是指在每次试验中 $P(A) = p$ 保持不变; “独立”是指各次试验的结果互不影响.

n 重伯努利试验是一种很重要的数学模型, 有着广泛的应用. n 重伯努利试验的特点: 事件 A 在每次试验中发生的概率均为 p , 且不受其他各次试验中 A 是否发生的影响. 当所考虑的问题可视为独立重复观测若干次, 每次只考虑非此即彼的“成功” (A 发生) 与“失败” ($\bar{A}$ 发生) 两类情形, 往往可归结为 n 重伯努利试验.



例如, 抛一枚硬币, 事件 $A = \{\text{硬币正面朝上}\}$, 这是一个伯努利试验. 如果将硬币抛 n 次 (看成独立重复地抛 n 次), 这就是 n 重伯努利试验.

又如, 袋中装有 a 只白球, b 只黑球, c 只红球. 试验是在袋中任取一只球, 观察其颜色. 考虑事件 $A = \{\text{取到白球}\}$, $\bar{A} = \{\text{取到的不是白球}\}$, 则 $P(A) = \frac{a}{a+b+c}$.

若连续取球 n 次作放回抽样, 这就是 n 重伯努利试验.

若连续取球 n 次作不放回抽样, 虽然由抽签原理可知每次试验中都有 $P(A) = \frac{a}{a+b+c}$, 但各次试验不再相互独立, 因而不再是 n 重伯努利试验了.

进行 n 重伯努利试验, 在每次试验中事件 A 可能发生也可能不发生. 显然

在 n 重伯努利试验中, 事件 A 可能发生的次数为 $0, 1, 2, \dots, n$.



定理（伯努利定理） 进行 n 重伯努利试验, 在每次试验中 $P(A) = p$, 则
 $P\{n \text{ 重伯努利试验中事件 } A \text{ 恰好发生 } k \text{ 次}\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n.$

 **P33**

由伯努利定理, 得

$$P\{n \text{ 重伯努利试验中事件 } A \text{ 发生不到 } k \text{ 次}\} = \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j p^j (1-p)^{n-j};$$

$$P\{n \text{ 重伯努利试验中事件 } A \text{ 发生多于 } k \text{ 次}\} = \sum_{j=k+1}^n C_n^j p^j (1-p)^{n-j};$$

$$P\{n \text{ 重伯努利试验中事件 } A \text{ 发生不少于 } k \text{ 次}\} = \sum_{j=k}^n C_n^j p^j (1-p)^{n-j};$$

$$P\{n \text{ 重伯努利试验中事件 } A \text{ 发生不多于 } k \text{ 次}\} = \sum_{j=0}^k C_n^j p^j (1-p)^{n-j}.$$



n 重伯努利试验是**最简单的独立重复试验**. 进行独立重复试验时, 有关事件的概率保持不变, 而且各次试验是相互独立的. 重复独立试验是作为“在相同条件下重复试验”的数学模型而出现的, 它在概率论中很有地位, 因为随机现象的统计规律性只有在大量重复试验中才会显示出来.

 **P41-62.** 设 A, B, C 是三个相互独立的事件, 且 $P(A) > 0, 0 < P(C) < 1$, 则在下列给出的四对事件中不相互独立的是 ()

- (A) $\overline{A \cup B}$ 与 C . (B) $\overline{AC}$ 与 $\bar{C}$. (C) $A - B$ 与 C . (D) $\overline{AB}$ 与 $\bar{C}$.

答案:(B)



✍️ **P41-58.** 设 A, B 是两个事件, $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, $P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$,

则 A 与 B 的关系是 ()

(A) 互不相容. (B) 相互独立. (C) 不相互独立. (D) 互为对立.

58.答案:(B)

✍️ **P41-60.** 设事件 A 与 B 相互独立, $P(B) = 0.5$, $P(A - B) = 0.3$,

则 $P(B - A) = ()$

(A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.

60.答案:(B)

✍️ **P41-68.** 设 A, B, C 为随机事件, 且 A 与 B 互不相容, A 与 C 互不相容,

B 与 C 相互独立, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, 求 $P(B \cup C | A \cup B \cup C)$.

68.答案: $\frac{5}{8}$.



