

# 概率论与数理统计

课程号： 21020023 课序号： 01-10 开课学院： 数学学院

| 题号  | 一  | 二  | 三  | 四  | 五  | 六  | 七  | 八  | 九  | 总分  |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 题分  | 15 | 15 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 100 |
| 得分  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
| 评阅人 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |

一、(1)  $\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6}$ ; (2)  $\frac{1}{2\sqrt{y}}$ ; (3)  $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{5}{18}$ ; (4)  $\frac{5}{12}$ ; (5)  $\frac{1}{n(n-1)}$ .

二、(1) (D); (2) (C); (3) (C); (4) (B); (5) (B).

## 一、填空题（15 分，每小题 3 分）

✓(1) 设  $A, B$  为两个随机事件,  $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}$ . 若  $B \subset A$ , 则  $P(\overline{AB}) =$  \_\_\_\_\_;  
若  $A$  与  $B$  互不相容, 则  $P(\overline{AB}) =$  \_\_\_\_\_; 若  $A$  与  $B$  相互独立, 则  $P(\overline{AB}) =$  \_\_\_\_\_.

✓(2) 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}, & 1 < x < 3, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  记  $f_Y(y)$  为  $Y = (X-2)^2$  的概率密度, 则当  $0 < y < 1$  时,  $f_Y(y) =$  \_\_\_\_\_.

(3) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布为

| $X \backslash Y$ | 1   | 2        | 3       |
|------------------|-----|----------|---------|
| 1                | 1/6 | 1/9      | 1/18    |
| 2                | 1/3 | $\alpha$ | $\beta$ |

且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $\alpha =$  \_\_\_\_\_,  $\beta =$  \_\_\_\_\_,  $P\{X+Y=4\} =$  \_\_\_\_\_.

(4) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  服从区间  $(0,2)$  上的均匀分布,  $Y$  服从均值为  $\frac{1}{2}$  的指数分布, 则  $D(XY) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(5) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 若  $b \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n (X_k - X_j)^2$  为  $\sigma^2$  的无偏估计量, 则  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 二、单项选择题 (15 分, 每小题 3 分)

✓ (1) 设  $A, B$  为两个随机事件, 且  $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$ , 若  $P(A|B) = 1$ , 则 ( )

(A)  $P(B|A) = 1$ . (B)  $P(A|\bar{B}) = 0$ . (C)  $P(A \cup B) = 1$ . (D)  $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$ .

✓ (2) 将一枚硬币独立重复地掷两次, 引进随机事件:  $A_1 = \{\text{掷第 1 次出现正面}\}$ ,  $A_2 = \{\text{掷第 2 次出现正面}\}$ ,  $A_3 = \{\text{正、反面各出现 1 次}\}$ ,  $A_4 = \{\text{正面出现 2 次}\}$ , 则 ( )

(A)  $A_1, A_2, A_3$  相互独立. (B)  $A_2, A_3, A_4$  相互独立.

(C)  $A_2, A_3$  相互独立. (D)  $A_1, A_4$  相互独立.

✓ (3) 设随机变量  $X, Y$  的概率密度相同,  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

已知随机事件  $A = \{X > a\}$  与  $B = \{Y > a\}$  相互独立, 且  $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ , 则  $a = ( )$

(A)  $\sqrt[3]{2}$ . (B)  $\sqrt[3]{4}$ . (C)  $\sqrt{2}$ . (D) 2.

(4) 设  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$  的简单随机样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{16} X_k$ ,

$p = P\{\bar{X} \leq \mu + \sigma^2\}$ , 则 ( )

(A)  $p$  随着  $\mu$  的增加而增加. (B)  $p$  随着  $\sigma$  的增加而增加.

(C)  $p$  随着  $\mu$  的增加而减少. (D)  $p$  随着  $\sigma$  的增加而减少.

(5) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自总体  $N(\mu, 1)$  的简单随机样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ , 则

下列结论中不正确的是 ( )

(A)  $\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布. (B)  $2(X_n - X_1)^2$  服从  $\chi^2$  分布.

(C)  $\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$  服从  $\chi^2$  分布. (D)  $n(\bar{X} - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布.

三、(10 分) 病树的主人小明外出, 委托邻居老王浇水. 已知如果不浇水, 树死去的概率为 0.8, 如果浇水, 树死去的概率为 0.15. 有 90% 的把握确定老王会记得浇水.

(1) 求小明回来时树还活着的概率; (2) 若小明回来时树已死去, 求老王忘记浇水的概率.

解 (1) 设  $A = \{\text{树还活着}\}$ ,  $B = \{\text{老王记得给树浇水}\}$ , 由全概率公式,

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) \\ = 0.9 \times (1 - 0.15) + 0.1 \times (1 - 0.8) = 0.785.$$

$$(2) P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{0.1 \times 0.8}{1 - 0.785} = \frac{16}{43} = 0.372.$$

四、(10 分) 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{4}, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

✓ (1) 求  $X$  的分布函数  $F(x)$ ; (2) 求  $P\{X > EX^2\}$ .

解 (1)

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0;$$

$$\text{当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } F(x) = \int_0^x \frac{3}{4} dt = \frac{3x}{4};$$

$$\text{当 } 1 \leq x < 2 \text{ 时, } F(x) = \int_0^1 \frac{3}{4} dt + \int_1^x \frac{1}{4} dt \\ = \frac{1}{2} + \frac{x}{4};$$

$$\text{当 } x \geq 2 \text{ 时, } F(x) = 1.$$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{3x}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$(2) EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 \frac{3}{4} x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{1}{4} + \frac{7}{12} = \frac{5}{6},$$

$$P\{X > EX^2\} = P\left\{X > \frac{5}{6}\right\} = 1 - F\left(\frac{5}{6}\right) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

五、(10 分) 从良种率为 20% 的一大批种子中任选 10000 粒. 利用中心极限定理求在这 10000 粒种子中良种所占的比例与良种率之差的绝对值小于 0.5% 的概率.

$$(\Phi(1.25) = 0.8944.)$$

**解** 设  $X$  表示任选的 10000 粒种子中良种的粒数, 则  $X \sim B(10000, 0.2)$ ,

$$\text{于是 } EX = 10000 \times 0.2 = 2000, \quad DX = 10000 \times 0.2 \times 0.8 = 1600,$$

由中心极限定理知  $X$  近似服从正态分布  $N(2000, 1600)$ ,

$$\begin{aligned} \text{故 } P\left\{\left|\frac{X}{10000} - 0.2\right| < 0.005\right\} &= P\{|X - 2000| < 50\} = P\left\{\left|\frac{X - 2000}{40}\right| < \frac{50}{40}\right\} \\ &\approx 2\Phi(1.25) - 1 = 0.7888. \end{aligned}$$

六、(10 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2y, & x^2 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求常数  $c$  及  $X$  的概率密度  $f_X(x)$ ; (2) 求  $P\{X \geq Y\}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 (1) 因为 } 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 cx^2y dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{c}{2} x^2 (1 - x^4) dx = \frac{4}{21} c, \quad \text{所以 } c = \frac{21}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } -1 \leq x \leq 1 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{x^2}^1 \frac{21}{4} x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4);$$

$$\text{当 } x < -1 \text{ 或 } x > 1 \text{ 时, } f_X(x) = 0. \text{ 故 } f_X(x) = \begin{cases} \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4), & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) } P\{X \geq Y\} &= \iint_{x \geq y} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{21}{4} x^2 y dy = \frac{21}{8} \int_0^1 (x^4 - x^6) dx = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

七、(10 分) 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中  $\theta (\theta > 0)$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 求  $\theta$  的最大似然估计量.

**解** 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $0 < x_i < 1, i = 1, 2, \dots, n$ ) 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k; \theta) = \prod_{k=1}^n \theta x_k^{\theta-1} = \theta^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\theta-1},$$

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{k=1}^n \ln x_k, \quad \frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{k=1}^n \ln x_k,$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0, \text{ 得 } \theta \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\theta} = -n / \sum_{k=1}^n \ln x_k.$$

$$\text{从而 } \theta \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{k=1}^n \ln X_k}.$$

八、(10 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n \geq 5$ ) 为来自总体  $N(0, 1)$  的简单随机样本.

(1) 若统计量  $Y = \frac{c(X_1 + X_2)}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}}$  ( $c > 0$ ) 服从  $t$  分布, 求常数  $c$  及该  $t$  分布的自由度;

(2) 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ , 求  $D(X_1 - \bar{X})$ .

(1) **解** 由题设知  $X_1 + X_2 \sim N(0, 2)$ ,  $\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$ ,  $X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 \sim \chi^2(3)$ ,

且  $\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$  与  $X_3^2 + X_4^2 + X_5^2$  相互独立, 由产生  $t$  变量的典型模式知

$$\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \bigg/ \sqrt{\frac{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}} \sim t(3),$$

故  $c = \sqrt{3/2}$ , 其自由度为 3.

(2) **解法 1**  $D(X_1 - \bar{X}) = DX_1 + D\bar{X} - 2\text{Cov}(X_1, \bar{X})$ ,

其中  $\text{Cov}(X_1, \bar{X}) = \text{Cov}\left(X_1, \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \text{Cov}(X_1, X_1) = \frac{1}{n} DX_1 = \frac{1}{n} DX$ ,

故  $D(X_1 - \bar{X}) = DX + \frac{1}{n} DX - \frac{2}{n} DX = \frac{n-1}{n} DX = \frac{n-1}{n}$ .

**解法 2**  $X_1 - \bar{X} = X_1 - \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{n-1}{n}X_1 + \frac{X_2 + \cdots + X_n}{n},$

且  $\frac{n-1}{n}X_1$  与  $\frac{X_2 + \cdots + X_n}{n}$  相互独立,

故  $D(X_1 - \bar{X}) = \frac{(n-1)^2}{n^2}DX + \frac{1}{n^2}(n-1)DX = \frac{n-1}{n}DX = \frac{n-1}{n}.$

**九、(10 分)** 随机试验  $E$  有三种两两不相容的结果  $A_1, A_2, A_3$ , 且三种结果发生的概率均为  $\frac{1}{3}$ . 将试验  $E$  独立重复做 2 次,  $X$  表示 2 次试验中结果  $A_1$  发生的次数,  $Y$  表示 2 次试验中结果  $A_2$  发生的次数. 求  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ .

**解** 由题设知

$$X \sim B\left(2, \frac{1}{3}\right), Y \sim B\left(2, \frac{1}{3}\right), EX = EY = \frac{2}{3}, DX = DY = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

$$P\{X=1, Y=2\} = P\{X=2, Y=1\} = P\{X=2, Y=2\} = 0,$$

$$E(XY) = 1 \times 1 \times P\{X=1, Y=1\} = \frac{2}{9},$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{2}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{2}{9},$$

$$\text{所以 } \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{-2/9}{4/9} = -\frac{1}{2}.$$

**注** 计算可得  $(X, Y)$  的概率分布、边缘概率分布为

| $\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$ | 0   | 1   | 2   | $P\{X=x\}$ |
|--------------------------------------|-----|-----|-----|------------|
| 0                                    | 1/9 | 2/9 | 1/9 | 4/9        |
| 1                                    | 2/9 | 2/9 | 0   | 4/9        |
| 2                                    | 1/9 | 0   | 0   | 1/9        |
| $P\{Y=y\}$                           | 4/9 | 4/9 | 1/9 |            |

# 概率论与数理统计

一、(1)  $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ ; (2)  $\frac{1}{4}$ ; (3)  $\frac{5}{12}$ ; (4)  $\frac{94}{7n}$ ; (5)  $\frac{3}{7n}$ .

二、(1) (D); (2) (C); (3) (A); (4) (D); (5) (B).

## 一、填空题 (15 分, 每小题 3 分)

✓ (1) 设  $A, B$  为两个随机事件,  $P(A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A|B) = \frac{1}{2}$ , 则  $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $P(\bar{B}A) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

✓ (2) 设  $A, B, C$  为三个随机事件,  $A$  与  $B$  相互独立,  $A$  与  $C$  相互独立,  $B$  与  $C$  互不相容. 若  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ ,  $P(AC|AB \cup C) = \frac{1}{4}$ , 则  $P(C) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 设随机变量  $X$  和  $Y$  的概率分布分别为

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $X$ | 0   | 1   |
| $P$ | 3/4 | 1/4 |

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $Y$ | -1  | 0   | 1   |
| $P$ | 1/3 | 1/2 | 1/6 |

且  $P\{XY=0\}=1$ , 则  $P\{X+Y=1\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 设随机变量  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY} = \frac{1}{4}$ ,  $X$  服从参数为 4 的泊松分布,  $Y$  服从均值为 3 的指数分布, 则  $D(5X - Y + 15) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(5) 设总体  $X$  服从区间  $(\theta, 2\theta)$  上的均匀分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本. 若  $c \sum_{i=1}^n X_i^2$  是  $\theta^2$  的无偏估计量, 则  $c = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 二、单项选择题 (15 分, 每小题 3 分)

✓ (1) 设  $A, B$  为两个随机事件, 则  $P(A) = P(B)$  的充分必要条件是 ( )

(A)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . (B)  $P(AB) = P(A)P(B)$ .

(C)  $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$ . (D)  $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$ .

✓(2) 将一枚硬币独立重复地掷两次, 引进随机事件:  $A_1 = \{\text{掷第1次出现正面}\}$ ,  $A_2 = \{\text{掷第2次出现正面}\}$ ,  $A_3 = \{\text{正、反面各出现1次}\}$ ,  $A_4 = \{\text{正面出现2次}\}$ , 则 ( )

- (A)  $A_1, A_2, A_3$  相互独立. (B)  $A_2, A_3, A_4$  相互独立.  
(C)  $A_1, A_2, A_3$  两两独立. (D)  $A_2, A_3, A_4$  两两独立.

✓(3) 设随机变量  $X$  的概率密度  $f(x)$  满足  $f(1+x) = f(1-x)$ , 且  $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$ , 则  $P\{X < 0\} = ( )$

- (A) 0.2. (B) 0.3. (C) 0.4. (D) 0.5.

(4) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 令  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ,  $Y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$ , 则  $DY = ( )$

- (A)  $\frac{\sigma^4}{n^2}$ . (B)  $\frac{2\sigma^4}{n}$ . (C)  $\frac{2\sigma^4}{n-1}$ . (D)  $\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$ .

(5) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 令  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ,  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}$ ,  $S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2}$ , 则 ( )

- (A)  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n)$ . (B)  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$ .  
(C)  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n)$ . (D)  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n-1)$ .

✓三、(10 分) 小明下午 5:00 放学, 他所积累的资料表明:

| 到家时间         | 5:35~5:39 | 5:40~5:44 | 5:45~5:49 | 5:50~5:54 | 晚于 5:54 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| 当乘地铁时到家时间的概率 | 0.10      | 0.25      | 0.45      | 0.15      | 0.05    |
| 当乘汽车时到家时间的概率 | 0.30      | 0.35      | 0.20      | 0.10      | 0.05    |

某日小明抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车, 结果他 5:42 到家, 求小明是乘汽车回家的概率.

**解** 设  $A = \{\text{到家时间在 } 5:40 \sim 5:44 \text{ 之间}\}$ ,  $B = \{\text{乘汽车回家}\}$ , 由全概率公式

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = 0.5 \times 0.35 + 0.5 \times 0.25 = 0.3,$$

$$\text{故 } P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0.5 \times 0.35}{0.3} = \frac{7}{12} (= 0.583).$$

**四、(10 分)** 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求常数  $c$ ; (2) 求  $X$  的分布函数  $F(x)$ .

**解** (1) 因为  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^3 cx dx + \int_3^4 \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{9}{2}c + \frac{1}{4}$ , 所以  $c = \frac{1}{6}$ .

(2) 当  $x < 0$  时,  $F(x) = 0$ ;

故

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 \leq x < 3 \text{ 时, } F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{t}{6} dt = \frac{x^2}{12}; \\ \text{当 } 3 \leq x < 4 \text{ 时, } F(x) &= \int_0^3 \frac{t}{6} dt + \int_3^x \left(2 - \frac{t}{2}\right) dt \\ &= 2x - \frac{x^2}{4} - 3; \\ \text{当 } x \geq 4 \text{ 时, } F(x) &= 1. \end{aligned} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{12}, & 0 \leq x < 3, \\ 2x - \frac{x^2}{4} - 3, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

**五、(10 分)** 某药厂断言, 该厂生产的某种新药对于医治一种疑难血液病的治愈率为 0.8. 医院任意抽查 100 个服用此药品的病人, 若其中多于 75 人治愈, 就接受此断言, 否则就拒绝此断言. 若实际上此药品对这种疾病的治愈率为 0.8, 求接受这一断言的概率. ( $\Phi(1.25) = 0.8944$ .)

**解** 设  $X$  表示 100 个服用此药品的病人中治愈的人数, 则  $X \sim B(100, 0.8)$ ,

于是  $EX = 100 \times 0.8 = 80$ ,  $DX = 100 \times 0.8 \times 0.2 = 16$ ,

由中心极限定理知  $X$  近似服从正态分布  $N(80, 4^2)$ ,

$$\text{故 } P\{X > 75\} = P\left\{\frac{X - 80}{\sqrt{16}} > \frac{75 - 80}{\sqrt{16}}\right\} \approx 1 - \Phi(-1.25) = \Phi(1.25) = 0.8944.$$

六、(10 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求  $P\{X+Y \leq 1\}$ ; (2) 求  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ ;

✓ (3) 求  $Z = Y^2$  的概率密度  $f_Z(z)$ .

**解** (1)  $P\{X+Y < 1\} = \iint_{x+y < 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{1/2} dy \int_y^{1-y} e^{-x} dx$   
 $= -\int_0^{1/2} (e^{y-1} - e^{-y}) dy = 1 + e^{-1} - 2e^{-1/2} = (1 - e^{-1/2})^2.$

(2) 当  $y > 0$  时,  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_y^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-y};$

当  $y \leq 0$  时,  $f_Y(y) = 0$ . 故  $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$

(3) 当  $Y$  的取值范围为  $(0, +\infty)$  时,  $Z = Y^2$  的取值范围为  $(0, +\infty)$ .  
 记  $Z$  的分布函数为  $F_Z(z)$ ,

当  $z > 0$  时,  $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{Y^2 \leq z\} = P\{-\sqrt{z} \leq Y \leq \sqrt{z}\}$   
 $= \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} f_Y(y) dy = \int_0^{\sqrt{z}} e^{-y} dy = 1 - e^{-\sqrt{z}}, \quad f_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}};$

当  $z \leq 0$  时,  $F_Z(z) = 0, \quad f_Z(z) = 0$ . 故  $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

七、(10 分) 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2 x^3} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 x^2}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中  $\sigma^2 (\sigma > 0)$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 求  $\sigma^2$  的最大似然估计量.

**解** 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ ) 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2 x_i^3} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 x_i^2}} = \frac{1}{\sigma^{2n} x_1^3 x_2^3 \cdots x_n^3} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}},$$

$$\ln L(\sigma^2) = -n \ln \sigma^2 - 3 \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2},$$

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2},$$

令  $\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = 0$ , 得  $\sigma^2$  的最大似然估计值为  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$ ,

从而  $\sigma^2$  的最大似然估计量为  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i^2}$ .

八、(5 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_5$  为来自总体  $N(0, 1)$  的简单随机样本. 若统计量

$$Y = \frac{c(X_1 - X_2)}{|X_3 + X_4 + X_5|} \quad (c > 0)$$

服从  $t$  分布, 求常数  $c$  及该  $t$  分布的自由度.

**解** 由题设知  $X_1 - X_2 \sim N(0, 2)$ ,  $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$ ,

$$X_3 + X_4 + X_5 \sim N(0, 3), \quad \frac{X_3 + X_4 + X_5}{\sqrt{3}} \sim N(0, 1), \quad \left( \frac{X_3 + X_4 + X_5}{\sqrt{3}} \right)^2 \sim \chi^2(1),$$

且  $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$  与  $\left( \frac{X_3 + X_4 + X_5}{\sqrt{3}} \right)^2$  相互独立, 由产生  $t$  变量的典型模式知

$$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \bigg/ \sqrt{\left( \frac{X_3 + X_4 + X_5}{\sqrt{3}} \right)^2 / 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 + X_5|} \sim t(1),$$

故  $c = \sqrt{\frac{3}{2}}$ , 其自由度为 1.

九、(15 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y+1\}$  上的均匀分布. (1) 求  $X$  的概率密度  $f_X(x)$ ; (2) 求  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ .

**解** (1)  $D$  的面积  $S_D = 1$ , 故  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$\text{当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^x dy = x;$$

$$\text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{x-1}^1 dy = 2 - x;$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 或 } x > 2 \text{ 时, } f_X(x) = 0.$$

$$\text{故 } f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2)

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{y+1} x dx = \int_0^1 \left( y + \frac{1}{2} \right) dy = 1,$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{y+1} y dx = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2},$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{y+1} xy dx = \int_0^1 \left( y^2 + \frac{1}{2} y \right) dy = \frac{7}{12},$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{7}{12} - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12};$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{y+1} x^2 dx = \int_0^1 \left( y^2 + y + \frac{1}{3} \right) dy = \frac{7}{6},$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6},$$

$$EY^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{y+1} y^2 dx = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3},$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$\text{所以 } \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{1/12}{\sqrt{1/6} \cdot \sqrt{1/12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

# 概率论与数理统计

一、(1)  $\frac{7}{30}, \frac{7}{60}, \frac{17}{20}$ ; (2)  $\frac{1}{3}$ ; (3)  $\frac{1}{2}e^{-2}$ ; (4) 3; (5)  $n$ .

二、(1) (D); (2) (D); (3) (A); (4) (C); (5) (B).

## 一、填空题 (15 分, 每小题 3 分)

✓ (1) 设  $A, B, C$  为三个随机事件,  $P(A)=1/2, P(B)=1/3, P(C)=1/5, P(AB)=1/10, P(AC)=1/15, P(BC)=1/20, P(ABC)=1/30$ , 则  $P(\bar{A}B)=$  \_\_\_\_\_,  $P(\bar{A}\bar{B}C)=$  \_\_\_\_\_,  $P(A \cup B \cup C)=$  \_\_\_\_\_.

✓ (2) 设随机事件  $A, B, C$  相互独立,  $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$ , 则  $P(AC|A \cup B)=$  \_\_\_\_\_.

(3) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  服从方差为  $\ln 2$  的泊松分布,  $Y$  服从均值为 2 的指数分布, 则  $P\{X < 1, Y > 4\} =$  \_\_\_\_\_.

(4) 设随机变量  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$ ,  $X \sim N(0, 4), Y \sim N(0, 16)$ , 令  $W = (aX + 3Y)^2$ , 则当  $a =$  \_\_\_\_\_ 时,  $EW$  取最小值.

(5) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(0, 1)$  的简单随机样本, 令  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ , 若  $c\bar{X}^2$  服从  $\chi^2$  分布, 则  $c =$  \_\_\_\_\_.

## 二、单项选择题 (15 分, 每小题 3 分)

✓ (1) 设随机事件  $A$  与  $B$  互不相容, 则 ( )

(A)  $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$ .

(B)  $P(AB) = P(A)P(B)$ .

(C)  $P(A) = 1 - P(B)$ .

(D)  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$ .

(2) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^3 < y < \sqrt{x}\}$  上的均匀分布, 则  $P\{X \leq Y\} =$  ( )

(A)  $\frac{1}{6}$ .

(B)  $\frac{5}{12}$ .

(C)  $\frac{1}{2}$ .

(D)  $\frac{2}{5}$ .

(3) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立都服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P\{|X-Y|<1\}$  ( )

- (A) 与  $\mu$  无关, 而与  $\sigma^2$  有关. (B) 与  $\mu$  有关, 而与  $\sigma^2$  无关.  
(C) 与  $\mu, \sigma^2$  都有关. (D) 与  $\mu, \sigma^2$  都无关.

(4) 设随机变量  $X \sim t(n)$ , 给定  $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$ , 数  $t_\alpha$  满足  $P\{|X| < t_\alpha\} = 1 - \alpha$ . 若  $P\{X > x\} = \alpha$ , 则  $x =$  ( )

- (A)  $t_{1-2\alpha}$ . (B)  $t_\alpha$ . (C)  $t_{2\alpha}$ . (D)  $t_{2(1-\alpha)}$ .

(5) 设  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 令  $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{16} X_k$ ,  $S^2 = \frac{1}{15} \sum_{k=1}^{16} (X_k - \bar{X})^2$ . 若  $P\{\bar{X} > \mu + cS\} = 0.95$ , 则  $c =$  ( )

(已知  $P\{t(15) > 1.7531\} = 0.05$ ,  $P\{t(16) > 1.7459\} = 0.05$ .)

- (A)  $-0.4365$ . (B)  $-0.4383$ . (C)  $-6.9836$ . (D)  $-7.0124$ .

三、(10 分) 已知 8 支枪中 3 支未经校正, 5 支已校正. 小明用前者射击, 中靶的概率为 0.3; 而用后者射击, 中靶的概率为 0.8. 今天小明从这 8 支枪中任取 1 支射击, 结果中靶, 求这枪是已校正过的概率.

解 设  $A = \{\text{射击中靶}\}$ ,  $B = \{\text{枪是已校正过的}\}$ ,

$P(B) = \frac{5}{8}$ ,  $P(\bar{B}) = \frac{3}{8}$ ,  $P(A|B) = 0.8$ ,  $P(A|\bar{B}) = 0.3$ , 由全概率公式

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = \frac{5}{8} \times 0.8 + \frac{3}{8} \times 0.3 = \frac{49}{80} \text{ 或 } = 0.6125,$$

$$\text{故 } P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{5}{8} \times 0.8 \bigg/ \frac{49}{80} = \frac{40}{49} \text{ 或 } \approx 0.816.$$

四、(10 分) 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ x-2, & 2 < x < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求  $X$  的分布函数  $F(x)$ ; (2) 求  $P\{X \leq E(X+1)\}$ .

**解** (1) 当  $x < 0$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$ ;

当  $0 \leq x < 1$  时,  $F(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$ ;

当  $1 \leq x < 2$  时,  $F(x) = \int_0^1 t dt + \int_1^x t dt = \frac{1}{2}$ ;

当  $2 \leq x < 3$  时,  $F(x) = \int_0^1 t dt + \int_2^x (t-2) dt$   
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-2)^2 = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2}$ ;

当  $x \geq 3$  时,  $F(x) = 1$ .

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$(2) EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^1 x \cdot x dx + \int_2^3 x(x-2) dx = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3},$$

$$E(X+1) = EX + 1 = \frac{8}{3}, P\{X \leq E(X+1)\} = P\left\{X \leq \frac{8}{3}\right\} = F\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{13}{18}.$$

$$\text{或 } P\left\{X \leq \frac{8}{3}\right\} = \int_{-\infty}^{8/3} f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_2^{8/3} (x-2) dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{13}{18}.$$

**五、(10 分)** 一复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件组成, 在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.1. 为了使整个系统起作用, 至少必须有 85 个部件正常工作. 利用中心极限定理求整个系统起作用的概率. ( $\Phi(5/3) = 0.9525$ .)

**解** 设  $X$  表示 100 个部件中正常工作的部件数, 则  $X \sim B(100, 0.9)$ ,

于是  $EX = 100 \times 0.9 = 90$ ,  $DX = 100 \times 0.9 \times 0.1 = 9$ ,

由中心极限定理知  $X$  近似服从正态分布  $N(90, 9)$ ,

故所求概率为  $P\{X \geq 85\} = P\left\{\frac{X-90}{\sqrt{9}} \geq \frac{85-90}{\sqrt{9}}\right\} \approx 1 - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 0.9525$ .

**六、(10 分)** 设随机变量  $X$  和  $Y$  的分布函数分别为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 3/4, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -1, \\ 1/3, & -1 \leq y < 0, \\ 5/6, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1, \end{cases}$$

且  $P\{XY=0\}=1$ . (1) 求  $(X, Y)$  的概率分布; (2) 求  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ .

**解** (1) 易见  $X, Y$  都是离散型随机变量, 其概率分布分别为

| $X$ | 0   | 1   |
|-----|-----|-----|
| $P$ | 3/4 | 1/4 |

| $Y$ | -1  | 0   | 1   |
|-----|-----|-----|-----|
| $P$ | 1/3 | 1/2 | 1/6 |

由  $P\{XY=0\}=1$  得  $P\{XY \neq 0\} = P\{X=1, Y=-1\} + P\{X=1, Y=1\} = 0$ ,

所以  $P\{X=1, Y=-1\} = P\{X=1, Y=1\} = 0$ .

再利用  $X, Y$  的边缘概率分布即得  $(X, Y)$  的概率分布为

| $\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$ | -1            | 0             | 1             |
|--------------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| 0                                    | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 1                                    | 0             | $\frac{1}{4}$ | 0             |

$$(2) \quad EX = \frac{1}{4}, \quad EY = -\frac{1}{6}, \quad E(XY) = 0,$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{1}{24},$$

$$DX = \frac{3}{16}, \quad EY^2 = \frac{1}{2}, \quad DY = \frac{17}{36},$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{1/24}{\sqrt{3/16} \cdot \sqrt{17/36}} = \frac{1}{\sqrt{51}}.$$

七、(10 分) 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中  $\theta (\theta > 0)$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 求  $\theta$  的最大似然估计量.

**解** 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $0 \leq x_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n$ ) 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \sqrt{\theta} x_i^{\sqrt{\theta}-1} = \theta^{n/2} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1},$$

$$\ln L(\theta) = \frac{n}{2} \ln \theta - (\sqrt{\theta} - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad \frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0, \text{ 得 } \theta \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\theta} = n^2 / \left( \sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^2,$$

$$\text{从而 } \theta \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\theta} = n^2 / \left( \sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2. \quad \text{或 } \hat{\theta} = [-n / \ln(X_1 \cdots X_n)]^2.$$

八、(10 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $\mu$  已知.

(1) 若  $b \sum_{k=1}^n |X_k - \mu|$  是  $\sigma$  的无偏估计量, 求常数  $b$ ;

(2) 令  $Y = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$ , 求  $Z = e^Y$  的概率密度  $f_Z(z)$ .

**解** (1) 令  $U_k = \frac{X_k - \mu}{\sigma}$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , 则  $U_k \sim N(0, 1)$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} E\left(b \sum_{k=1}^n |X_k - \mu|\right) &= b \sum_{k=1}^n E|X_k - \mu| = b\sigma \sum_{k=1}^n E\left|\frac{X_k - \mu}{\sigma}\right| = b\sigma \sum_{k=1}^n E|U_k| = b\sigma n E|U_1| \\ &= b\sigma n \int_{-\infty}^{+\infty} |u_1| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u_1^2} du_1 = b\sigma n \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u_1 e^{-\frac{1}{2}u_1^2} du_1 = b\sigma n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sigma, \text{ 故 } b = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

(2)  $Y = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ , 当  $Y$  的取值范围为  $(-\infty, +\infty)$  时,

$Z = e^Y$  的取值范围为  $(0, +\infty)$ . 记  $Z$  的分布函数为  $F_Z(z)$ ,

当  $z \leq 0$  时,  $F_Z(z) = 0$ ,  $f_Z(z) = 0$ ;

当  $z > 0$  时,  $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{e^Y \leq z\} = P\{Y \leq \ln z\} = \Phi(\ln z)$ ,

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \varphi(\ln z) \frac{1}{z} = \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln z)^2/2}, \text{ 故 } f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln z)^2/2}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

九、(10 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ay(2-x), & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求常数  $A$  及  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ ; (2) 求  $P\{X+Y \leq 1\}$ .

**解** (1) 因为  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x Ay(2-x) dy$

$$= \frac{A}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx = \frac{5}{24} A, \text{ 所以 } A = \frac{24}{5} = 4.8.$$

$$\text{当 } 0 \leq y \leq 1 \text{ 时, } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 \frac{24}{5} y(2-x) dx = \frac{12}{5} y(3-4y+y^2);$$

$$\text{当 } y < 0 \text{ 或 } y > 1 \text{ 时, } f_Y(y) = 0. \text{ 故 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{12}{5} y(3-4y+y^2), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P\{X+Y \leq 1\} &= \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{1/2} dy \int_y^{1-y} \frac{24}{5} y(2-x) dx \\ &= \frac{36}{5} \int_0^{1/2} y(1-2y) dy = \frac{36}{5} \times \frac{1}{24} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

# 概率论与数理统计

| 题号  | 一  | 二  | 三  | 四  | 五  | 六  | 七  | 八  | 九 | 十 | 总分  |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|-----|
| 题分  | 15 | 15 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 5 | 5 | 100 |
| 得分  |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |     |
| 评阅人 |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |     |

一、(1)  $\frac{5}{12}$ . (2)  $\frac{1}{2}\ln 2$ . (3)  $0, \frac{25}{2}, \frac{1}{e}$ . (4)  $\frac{1}{2}$ . (5)  $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

二、(1) (A); (2) (B); (3) (D); (4) (A); (5) (C).

## 一、填空题 (15 分, 每小题 3 分)

✓(1) 设  $A, B, C$  为三个随机事件, 且  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ ,  $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$ ,  $P(AB) = 0$ , 则  $A, B, C$  中恰有一个事件发生的概率为 \_\_\_\_\_.

✓(2) 设每个粮仓内有老鼠的数目  $X$  服从泊松分布, 根据统计资料, 一个粮仓内有老鼠的概率与无老鼠的概率相等, 则一个粮仓内仅有一只老鼠的概率为 \_\_\_\_\_.

(3) 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.4x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$  则  $P\{X = 2.5\} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,

$EX^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $P\{X > \sqrt{DX}\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  服从参数为 1 的指数分布,  $Y$  的概率分布为  $P\{Y = -1\} = p$ ,  $P\{Y = 1\} = 1 - p$  ( $0 < p < 1$ ), 令  $Z = XY$ , 则当  $p = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $X$  与  $Z$  不相关.

(5) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $\mu$  已知. 若  $b \sum_{k=1}^n |X_k - \mu|$  是  $\sigma$  的无偏估计量, 则  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 二、单项选择题 (15 分, 每小题 3 分)

✓ (1) 设  $A, B$  为随机事件,  $P(\bar{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\bar{B}) = 0.5$ , 则  $P(B|A \cup \bar{B}) = ( )$

- (A)  $\frac{1}{4}$ . (B)  $\frac{1}{3}$ . (C)  $\frac{1}{2}$ . (D)  $\frac{21}{40}$ .

✓ (2) 设  $A, B, C$  是三个相互独立的随机事件, 且  $P(A) > 0, 0 < P(C) < 1$ , 则在下列给出的四对事件中不相互独立的是 ( )

- (A)  $\overline{A \cup B}$  与  $C$ . (B)  $\overline{AC}$  与  $\bar{C}$ . (C)  $A - B$  与  $C$ . (D)  $\overline{AB}$  与  $\bar{C}$ .

(3) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立都服从区间  $(0, 1)$  上的均匀分布, 则

$$P\left\{|X - Y| \leq \frac{2}{3}\right\} = ( )$$

- (A)  $\frac{4}{9}$ . (B)  $\frac{5}{9}$ . (C)  $\frac{7}{9}$ . (D)  $\frac{8}{9}$ .

(4) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立都服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P\{|X - Y| < 1\}$  ( )

- (A) 与  $\mu$  无关, 而与  $\sigma^2$  有关. (B) 与  $\mu$  有关, 而与  $\sigma^2$  无关.  
(C) 与  $\mu, \sigma^2$  都有关. (D) 与  $\mu, \sigma^2$  都无关.

(5) 设  $X_1, X_2, X_3$  为来自总体  $N(0, \sigma^2)$  的简单随机样本, 若统计量  $\eta = \frac{c(X_1 - X_2)}{|X_3|}$  ( $c > 0$ ) 服从  $t$  分布, 则  $c = ( )$

- (A)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ . (B)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ . (C)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . (D)  $\sqrt{2}$ .

✓ 三、(10 分) 某发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号 “•” 和 “——”. 由于通信系统受到干扰, 当发出信号 “•” 时, 收报台未必收到信号 “•”, 而是分别以概率 0.8 和 0.2 收到信号 “•” 和 “——”; 当发报台发出信号 “——” 时, 收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到信号 “——” 和 “•”. 当收报台收到的信号是 “•” 时, 求发报台确实发出信号 “•” 的概率.

解 设  $A = \{\text{收报台收到信号 “•”}\}$ ,  $B = \{\text{发报台发出信号 “•”}\}$ ,  
 $P(B) = 0.6, P(\bar{B}) = 0.4, P(A|B) = 0.8, P(A|\bar{B}) = 0.1$ , 由全概率公式  
 $P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = 0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.1 = 0.52$ .

$$\text{故 } P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0.6 \times 0.8}{0.52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13} \text{ 或 } = 0.923.$$

四、(10 分) 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1/3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2/9, & 3 \leq x \leq 6, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

✓(1) 求  $X$  的分布函数  $F(x)$ ; (2) 求  $P\{X \geq E(X+1)\}$ .

解 (1) 当  $x < 0$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$ ;

$$\text{当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } F(x) = \int_0^x \frac{1}{3} dt = \frac{x}{3};$$

$$\text{当 } 1 \leq x < 3 \text{ 时, } F(x) = \int_0^1 \frac{1}{3} dt + \int_1^x \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3};$$

$$\begin{aligned} \text{当 } 3 \leq x < 6 \text{ 时, } F(x) &= \int_0^1 \frac{1}{3} dt + \int_3^x \frac{2}{9} dt \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9}(x-3) = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\text{当 } x \geq 6 \text{ 时, } F(x) = 1.$$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 3, \\ \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}, & 3 \leq x < 6, \\ 1, & x \geq 6. \end{cases}$$

$$(2) EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{3} dx + \int_3^6 x \cdot \frac{2}{9} dx = \frac{19}{6}, \quad E(X+1) = EX + 1 = \frac{25}{6},$$

$$P\{X \geq E(X+1)\} = P\left\{X \geq \frac{25}{6}\right\} = 1 - F\left(\frac{25}{6}\right) = 1 - \frac{16}{27} = \frac{11}{27}.$$

$$\text{或 } P\left\{X \geq \frac{25}{6}\right\} = \int_{25/6}^{+\infty} f(x) dx = \int_{25/6}^6 \frac{2}{9} dx = \frac{11}{27}.$$

五、(10 分) 有一批建筑房屋用的木柱, 其中 80% 的长度不短于 3 米, 现从这批木柱中随机地取出 100 根, 利用中心极限定理求其中至少有 30 根短于 3 米的概率.

$$(\Phi(2.5) = 0.9938.)$$

解 设  $X$  表示取出的 100 根木柱中长度短于 3 米的根数, 则  $X \sim B(100, 0.2)$ ,

$$\text{于是 } EX = 100 \times 0.2 = 20, \quad DX = 100 \times 0.2 \times 0.8 = 16,$$

由中心极限定理知  $X$  近似服从正态分布  $N(20, 16)$ ,

$$\text{故 } P\{X \geq 30\} = P\left\{\frac{X-20}{\sqrt{16}} \geq \frac{30-20}{\sqrt{16}}\right\} \approx 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062.$$

六、(10 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{Ay^2}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求常数  $A$  及  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ ; (2) 求  $P\{X > 2Y\}$ .

**解** (1) 因为  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{Ay^2}{x} dy = \frac{A}{3} \int_0^1 x^2 dx = \frac{A}{9}$ ,

所以  $A = 9$ .

当  $0 < y < 1$  时,  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 \frac{9y^2}{x} dx = -9y^2 \ln y$ ;

当  $y \leq 0$  或  $y \geq 1$  时,  $f_Y(y) = 0$ . 故  $f_Y(y) = \begin{cases} -9y^2 \ln y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(2)  $P\{X > 2Y\} = \iint_{x>2y} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x} dy = \int_0^1 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{1}{8}$ .

七、(10 分) 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

其中  $\beta (\beta > 1)$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 求  $\beta$  的最大似然估计量.

**解** 设  $x_1, x_2, \dots, x_n (x_i > 1, i = 1, 2, \dots, n)$  为样本观测值,

似然函数为  $L(\beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \beta) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{x_i^{\beta+1}} = \frac{\beta^n}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\beta+1}}$ ,

$\ln L(\beta) = n \ln \beta - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$ ,  $\frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i$ , 令  $\frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = 0$ ,

得  $\beta$  的最大似然估计值为  $\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$ , 故  $\beta$  的最大似然估计量为  $\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$ .

八、(10 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n > 2$ ) 为来自总体  $N(0, \sigma^2)$  的简单随机样本,

令  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\xi_k = X_k - \bar{X}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

(1) 求  $\xi_1$  与  $\xi_n$  的相关系数  $\rho_{\xi_1 \xi_n}$ ; (2)  $\xi_1$  与  $\xi_n$  是否相互独立? 并说明理由.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \text{Cov}(\xi_1, \xi_n) &= \text{Cov}(X_1 - \bar{X}, X_n - \bar{X}) \\ &= \text{Cov}(X_1, X_n) - \text{Cov}(X_1, \bar{X}) - \text{Cov}(\bar{X}, X_n) + \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}), \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \text{Cov}(X_1, X_n) = 0, \quad \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) = D\bar{X} = \frac{1}{n} DX_1 = \frac{1}{n} \sigma^2,$$

$$\text{Cov}(X_1, \bar{X}) = \text{Cov}\left(X_1, \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \text{Cov}(X_1, X_1) = \frac{1}{n} DX_1 = \frac{1}{n} \sigma^2,$$

$$\text{同理可得 } \text{Cov}(\bar{X}, X_n) = \frac{1}{n} DX_n = \frac{1}{n} \sigma^2,$$

$$\text{故 } \text{Cov}(\xi_1, \xi_n) = 0 - \frac{1}{n} \sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 + \frac{1}{n} \sigma^2 = -\frac{1}{n} \sigma^2.$$

$$D\xi_1 = D(X_1 - \bar{X}) = DX_1 + D\bar{X} - 2\text{Cov}(X_1, \bar{X}) = \sigma^2 + \frac{1}{n} \sigma^2 - 2 \cdot \frac{1}{n} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2,$$

$$\text{同理可得 } D\xi_n = D(X_n - \bar{X}) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

$$\text{故 } \rho_{\xi_1 \xi_n} = \frac{\text{Cov}(\xi_1, \xi_n)}{\sqrt{D\xi_1} \sqrt{D\xi_n}} = \frac{-\frac{1}{n} \sigma^2}{\sqrt{\frac{n-1}{n} \sigma^2} \sqrt{\frac{n-1}{n} \sigma^2}} = -\frac{1}{n-1}.$$

(2) 因为  $\rho_{\xi_1 \xi_n} = -\frac{1}{n-1} \neq 0$  (或  $\text{Cov}(\xi_1, \xi_n) = -\frac{1}{n} \sigma^2 \neq 0$ ),  
所以  $\xi_1$  与  $\xi_n$  不相互独立.

九、(5 分) 设随机变量  $X, Y$  的概率分布相同,  $X$  的概率分布为  $P\{X=-1\}=1/4$ ,  $P\{X=0\}=1/2$ ,  $P\{X=1\}=1/4$ , 且  $P\{XY=0\}=1$ . 写出二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布, 并求  $P\{X=Y\}$ .

解 由  $P\{XY=0\}=1$  得  $P\{XY \neq 0\}=0$ ,

即  $P\{X=-1, Y=-1\}+P\{X=-1, Y=1\}+P\{X=1, Y=-1\}+P\{X=1, Y=1\}=0$

所以  $P\{X=-1, Y=-1\}=P\{X=-1, Y=1\}=P\{X=1, Y=-1\}=P\{X=1, Y=1\}=0$ .

再利用  $X, Y$  的边缘概率分布即得  $(X, Y)$  的概率分布为

| $X \backslash Y$ | -1  | 0   | 1   |
|------------------|-----|-----|-----|
| -1               | 0   | 1/4 | 0   |
| 0                | 1/4 | 0   | 1/4 |
| 1                | 0   | 1/4 | 0   |

故  $P\{X=Y\}=P\{X=-1, Y=-1\}+P\{X=0, Y=0\}+P\{X=1, Y=1\}=0$ .

十、(5 分) 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}, & 1 < x < 3, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求  $Y=(X-2)^2$  的概率密度  $f_Y(y)$ .

解 当  $X$  的取值范围为  $(1, 3)$  时,  $Y=(X-2)^2$  的取值范围为  $[0, 1)$ .

记  $Y$  的分布函数为  $F_Y(y)$ ,

当  $0 \leq y < 1$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{(X-2)^2 \leq y\}$

$$= P\{2-\sqrt{y} \leq X \leq 2+\sqrt{y}\} = \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) dx = \sqrt{y},$$

于是当  $0 < y < 1$  时,  $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ;

当  $y \geq 1$  时,  $F_Y(y) = 1$ ,  $f_Y(y) = 0$ ;

当  $y < 0$  时,  $F_Y(y) = 0$ ,  $f_Y(y) = 0$ ;

当  $y = 0$  时, 令  $f_Y(y) = 0$ .

$$\text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

# 概率论与数理统计

一、(1) (B); (2) (A); (3) (B); (4) (D); (5) (C).

二、(1)  $\frac{1}{4}$ ; (2)  $\ln 2$ ; (3)  $1 - e^{-2}$ ; (4)  $6$ ; (5)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

## 一、单项选择题 (15 分, 每小题 3 分)

✓ (1) 设随机事件  $A$  与  $B$  相互独立, 且  $P(B) = 0.5$ ,  $P(A - B) = 0.3$ , 则  $P(B - A) = ( )$   
 (A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.

✓ (2) 设随机变量  $X \sim B(1, p)$ ,  $Y \sim B(4, p)$ , 若  $P\{X \geq 1\} = \frac{2}{3}$ , 则  $P\{Y \geq 1\} = ( )$   
 (A)  $\frac{80}{81}$ . (B)  $\frac{65}{81}$ . (C)  $\frac{16}{81}$ . (D)  $\frac{1}{81}$ .

(3) 设随机变量  $V$  服从区间  $(0, 2\pi)$  上均匀分布,  $X = \cos V$ ,  $Y = \sin V$ , 则  $X$  与  $Y$  ( )  
 (A) 相互独立, 不相关. (B) 不相互独立, 不相关.  
 (C) 相互独立, 不是不相关的. (D) 不相互独立, 不是不相关的.

(4) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n > 2$ ) 为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 令  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ , 则  $D(X_1 + \bar{X}) = ( )$   
 (A)  $\frac{n-1}{n} \sigma^2$ . (B)  $\frac{n+1}{n} \sigma^2$ . (C)  $\frac{n+2}{n} \sigma^2$ . (D)  $\frac{n+3}{n} \sigma^2$ .

(5) 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(0, 1)$ , 则 ( )  
 (A)  $X + Y$  服从正态分布. (B)  $X^2 + Y^2$  服从  $\chi^2$  分布.  
 (C)  $X^2$  和  $Y^2$  都服从  $\chi^2$  分布. (D)  $\frac{X}{|Y|}$  服从  $t$  分布.

## 二、填空题 (15 分, 每小题 3 分)

✓ (1) 设  $A, B$  为两个随机事件,  $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$ ,  $P(B|A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(A|B) = \frac{1}{6}$ , 则  $P(\bar{A}\bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

✓ (2) 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} b2^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$  则  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

✓ (3) 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$  常数  $\alpha > 0$ , 则

$$P\{X \leq \alpha + 4 | X > \alpha\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(4) 设随机变量  $X$  服从泊松分布, 且  $2P\{X=1\} = 3P\{X=3\}$ , 则  $EX^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(5) 设  $X_1, X_2, \dots, X_5$  为来自总体  $N(0,1)$  的简单随机样本, 若统计量

$$\eta = \frac{c(X_1 + X_2)}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}} \quad (c > 0) \text{ 服从 } t \text{ 分布, 则 } c = \underline{\hspace{2cm}}.$$

✓ 三、(10 分) 设市场上某种商品由甲、乙、丙三个厂家同时供货, 已知甲厂的供应量为乙厂的 2 倍, 乙厂和丙厂的供应量相等, 各厂家供货的次品率依次为 2%, 2%, 4%. 现从市场上任意选购一件该商品, 经检验发现买到的商品不是次品, 求这件商品是由丙厂供货的概率.

**解** 设  $A = \{\text{买到的是次品}\}$ ,  $B_1 = \{\text{该商品由甲厂供货}\}$ ,  $B_2 = \{\text{该商品由乙厂供货}\}$ ,  $B_3 = \{\text{该商品由丙厂供货}\}$ . 由题设知  $P(B_1) = 0.5$ ,  $P(B_2) = P(B_3) = 0.25$ .

由全概率公式

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i) = 0.5 \times 0.02 + 0.25 \times 0.02 + 0.25 \times 0.04 = 0.025.$$

$$P(B_3|\bar{A}) = \frac{P(B_3)P(\bar{A}|B_3)}{P(\bar{A})} = \frac{0.25 \times (1 - 0.04)}{1 - 0.025} = \frac{16}{65} \quad (\text{或 } = 0.246)$$

四、(10 分) 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

✓ (1) 求  $X$  的分布函数  $F(x)$ ; (2) 求  $E\left(X + \frac{1}{X}\right)$ .

**解** (1) 当  $x < 1$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$ ;

$$\text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时, } F(x) = \int_1^x 2 \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = 2 \left( t + \frac{1}{t} \right) \Big|_1^x = 2 \left( x + \frac{1}{x} - 2 \right);$$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 2 \left( x + \frac{1}{x} - 2 \right), & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

当  $x > 2$  时,  $F(x) = 1$ .

$$(2) \quad E \left( X + \frac{1}{X} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( x + \frac{1}{x} \right) f(x) dx = \int_1^2 \left( x + \frac{1}{x} \right) \cdot 2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_1^2 2 \left( x + \frac{1}{x} \right) d \left( x + \frac{1}{x} \right) = \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 \Big|_1^2 = \left( \frac{5}{2} \right)^2 - 2^2 = \frac{9}{4}.$$

$$\text{或 } EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^2 x \cdot 2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left( 2x - \frac{2}{x} \right) dx = \left( x^2 - 2 \ln x \right) \Big|_1^2 = 3 - 2 \ln 2,$$

$$E \left( \frac{1}{X} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot 2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left( \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} \right) dx = \left( 2 \ln x + \frac{1}{x^2} \right) \Big|_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{3}{4}, \quad \text{故 } E \left( X + \frac{1}{X} \right) = EX + E \left( \frac{1}{X} \right) = 3 - 2 \ln 2 + 2 \ln 2 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

**五、(10 分)** 对于一个学生而言, 来参加家长会的家长人数是一个随机变量, 设一个学生无家长、1 名家长、2 名家长来参加会议的概率分别为 0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有 400 名学生, 设各学生参加会议的家长人数相互独立, 且服从同一分布. 利用中心极限定理求有 1 名家长来参加会议的学生人数不多于 340 的概率. ( $\Phi(2.5) = 0.9938$ .)

**解** 设  $X$  表示 400 名学生中有 1 名家长来参加会议的学生人数, 则  $X \sim B(400, 0.8)$ , 于是  $EX = 400 \times 0.8 = 320$ ,  $DX = 400 \times 0.8 \times 0.2 = 64$ , 由中心极限定理知  $X$  近似服从正态分布  $N(320, 64)$ ,

$$\text{故 } P\{X \leq 340\} = P\left\{ \frac{X - 320}{\sqrt{64}} \leq \frac{340 - 320}{\sqrt{64}} \right\} \approx \Phi(2.5) = 0.9938.$$

**六、(10 分)** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} A(1-x)y, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求常数  $A$ ; (2) 求  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ ; (3) 求  $P\{X+Y < 1\}$ .

**解** (1) 因为  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x A(1-x)y dy$   
 $= \frac{A}{2} \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{A}{24}$ , 所以  $A = 24$ .

(2) 当  $0 < y < 1$  时,  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 24(1-x)y dx = 12y(1-y)^2$ ;  
 当  $y \leq 0$  或  $y \geq 1$  时,  $f_Y(y) = 0$ . 故  $f_Y(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(3)  $P\{X+Y < 1\} = \iint_{x+y < 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{1/2} dy \int_y^{1-y} 24(1-x)y dx$   
 $= \int_0^{1/2} 12y(1-2y) dy = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ .

或  $P\{X+Y < 1\} = \iint_{x+y < 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{1/2} dx \int_0^x 24(1-x)y dy + \int_{1/2}^1 dx \int_0^{1-x} 24(1-x)y dy$   
 $= \int_0^{1/2} 12(x^2 - x^3) dx + \int_{1/2}^1 12(1-x)^3 dx = 4 \times \frac{1}{8} - 3 \times \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$ .

七、(5 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,

令  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ,  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2}$ . 若  $cS^4$  是  $\sigma^4$  的无偏估计量, 求常数  $c$ .

**解**  $E(cS^4) = cES^4 = c[DS^2 + (ES^2)^2] = c\left[\frac{2\sigma^4}{n-1} + (\sigma^2)^2\right] = \sigma^4 c \frac{n+1}{n-1} = \sigma^4$ ,

故  $c = \frac{n-1}{n+1}$ .

八、(15 分) 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中  $\theta (\theta > 0)$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本.

(1) 求  $\theta$  的最大似然估计量; (2) 当  $\theta = 1$  时, 求  $Y = e^{-2X}$  的概率密度  $f_Y(y)$ .

**解** (1) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $x_k > 0, k=1, 2, \dots, n$ ) 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k; \theta) = \prod_{k=1}^n \theta e^{-\theta x_k} = \theta^n e^{-\theta \sum_{k=1}^n x_k},$$

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta - \theta \sum_{k=1}^n x_k, \quad \frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{k=1}^n x_k,$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0, \text{ 得 } \theta \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\theta} = n / \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{\bar{x}},$$

$$\text{从而 } \theta \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\theta} = n / \sum_{k=1}^n X_k = \frac{1}{\bar{X}}.$$

$$(2) \text{ 当 } \theta=1 \text{ 时, } X \text{ 的概率密度为 } f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

当  $X$  的取值范围为  $(0, +\infty)$  时,  $Y = e^{-2X}$  的取值范围为  $(0, 1)$ .

记  $Y$  的分布函数为  $F_Y(y)$ , ① 当  $0 < y < 1$  时,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{e^{-2X} \leq y\} = P\left\{X \geq -\frac{1}{2} \ln y\right\} = e^{\frac{1}{2} \ln y} = \sqrt{y}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

② 当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = 0, f_Y(y) = 0$ .

$$\text{③ 当 } y \geq 1 \text{ 时, } F_Y(y) = 1, f_Y(y) = 0. \quad \text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

**解法 2** 当  $\theta=1$  时,  $X$  的概率密度为  $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

由于函数  $y = e^{-2x}$  在  $(0, +\infty)$  内严格单调且可导,

反函数为  $x = -\frac{1}{2} \ln y, \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2y}$ , 故  $Y$  的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(-\frac{1}{2} \ln y\right) \left| -\frac{1}{2y} \right|, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

九、(10 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $D = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$  上服从均匀

分布, 令  $U = \begin{cases} 1, & X-Y > 0, \\ 0, & X-Y \leq 0, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 1, & X+Y > 0, \\ 0, & X+Y \leq 0. \end{cases}$

(1) 求二维随机变量  $(U, V)$  的概率分布; (2) 求  $U$  与  $V$  的相关系数  $\rho_{UV}$ .

**解** (1)  $U$  的所有可能取值为 0, 1,  $V$  的所有可能取值为 0, 1, 并且

$$P\{U=0, V=0\} = P\{X-Y \leq 0, X+Y \leq 0\} = P\{Y \geq X, Y \leq -X\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{U=0, V=1\} = P\{X-Y \leq 0, X+Y > 0\} = P\{Y \geq X, Y > -X\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{U=1, V=0\} = P\{X-Y > 0, X+Y \leq 0\} = P\{Y < X, Y \leq -X\} = 0,$$

$$P\{U=1, V=1\} = P\{X-Y > 0, X+Y > 0\} = P\{Y < X, Y > -X\} = \frac{1}{4},$$

即得  $(U, V)$  的概率分布为

| $U \backslash V$ | 0             | 1             |
|------------------|---------------|---------------|
| 0                | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1                | 0             | $\frac{1}{4}$ |

$$(2) \quad EU = \frac{1}{4}, \quad EV = \frac{3}{4}, \quad E(UV) = \frac{1}{4}, \quad \text{Cov}(U, V) = E(UV) - EU \cdot EV = \frac{1}{16},$$

$$DU = \frac{3}{16}, \quad DV = \frac{3}{16}, \quad \text{故 } \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{DU} \sqrt{DV}} = \frac{1/16}{\sqrt{3/16} \cdot \sqrt{3/16}} = \frac{1}{3}.$$