

概率论与数理统计

(答案在后面)

一、填空题 (15 分, 每小题 3 分)

(1) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次射中目标的概率为 0.4, 则 $EX^2 =$ _____.

(2) 设随机变量 X 服从泊松分布, 且 $EX^2 = 2$, 则 $P\{X \leq \sqrt{DX}\} =$ _____.

(3) 设随机变量 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ _____.

(4) 设随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$, $X \sim N(1, 3^2)$, $Y \sim N(0, 4^2)$, 记 $Z = \frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y$, 则 $DZ =$ _____.

(5) 设 X_1, X_2, X_3 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 若统计量 $\eta = \frac{c(X_1 - X_2)}{|X_3|}$ ($c > 0$) 服从 t 分布, 则 $c =$ _____.

二、单项选择题 (15 分, 每小题 3 分)

(1) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	1/2	1/4	1/8	1/8

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

则 $P\{X+Y=2\} = (\quad)$

- (A) $\frac{1}{12}$. (B) $\frac{1}{8}$. (C) $\frac{1}{6}$. (D) $\frac{1}{2}$.

(2) 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 则 $EX^4 = (\quad)$

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(3) 设随机变量 X 服从区间 $(-1,1)$ 上的均匀分布, $Y=|X|$, 则 X 与 Y ()

- (A) 相互独立, 不相关. (B) 不相互独立, 不相关.
(C) 相互独立, 不是不相关的. (D) 不相互独立, 不是不相关的.

(4) 设随机变量 $X \sim t(n)$, 给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$, 数 z_α 满足 $P\{|X| < z_\alpha\} = 1 - \alpha$. 若 $P\{X > x\} = \alpha$, 则 $x = ()$

- (A) $z_{2\alpha}$. (B) z_α . (C) $z_{1-2\alpha}$. (D) $z_{2(1-\alpha)}$.

(5) 设 $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 为来自总体 $N(1, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 若统计量 $Y = a\bar{X} + b \sim N(0, 1)$, 则 ()

- (A) $a = \sigma, b = \sigma$. (B) $a = \sigma, b = -\sigma$. (C) $a = \frac{4}{\sigma}, b = \frac{4}{\sigma}$. (D) $a = -\frac{4}{\sigma}, b = \frac{4}{\sigma}$.

三、(10 分) 一公司有 50 张签约保险单, 各张保险单的索赔金额的数学期望为 5 万元, 标准差为 $\sqrt{6}$ 万元, 设各保险单索赔金额相互独立且服从相同的分布. 利用中心极限定理求 50 张保险单索赔的合计金额大于 300 万元的概率. ($\Phi(5/\sqrt{3}) = 0.9981$.)

四、(15 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\theta (\theta > 0)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求 θ 的最大似然估计量.

五、(15 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ax, & 0 < x < 1, 0 < y < \frac{1}{x}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求常数 A ; (2) 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$; (3) 求 $P\{Y \geq 2X\}$.

六、(15 分) 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布, 令 $U = \begin{cases} 1, & X^2 + Y^2 \leq 1, \\ -1, & X^2 + Y^2 > 1, \end{cases} V = \begin{cases} 1, & X \leq Y, \\ -1, & X > Y. \end{cases}$

(1) 求二维随机变量 (U, V) 的概率分布; (2) 求 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV} .

七、(15 分)

(1) 设 $X_1, X_2, \dots, X_6$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, 若统计量

$$\zeta = c \left[(X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2 + (X_5 + X_6)^2 \right]$$

服从 χ^2 分布, 求常数 c 及该 χ^2 分布的自由度.

(2) 设 X_1, X_2 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 若 $\hat{\sigma} = a |X_1 - X_2|$ 为 σ 的无偏估计量, 求常数 a .

一、(15 分) (1) 18.4; (2) $\frac{2}{e}$; (3) $\frac{2}{\pi}$; (4) 3; (5) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

二、(15 分) (1) (C); (2) (D); (3) (B); (4) (A); (5) (D).

三、(10 分)

解 设 X_i 为第 i 张保险单的索赔金额, $i=1, 2, \dots, 50$, 由题设知

$$E\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = 50 \times 5 = 250, D\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = 50 \times 6 = 300,$$

由中心极限定理知 $\sum_{i=1}^{50} X_i$ 近似服从正态分布 $N(250, 300)$, 故

$$P\left\{\sum_{i=1}^{50} X_i > 300\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 250}{\sqrt{300}} > \frac{300 - 250}{\sqrt{300}}\right\} \approx 1 - \Phi\left(5/\sqrt{3}\right) = 1 - 0.9981 = 0.0019.$$

四、(15 分)

解 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($0 < x_i < 1, i=1, 2, \dots, n$) 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} x_i^{(1-\theta)/\theta} = \frac{1}{\theta^n} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{(1-\theta)/\theta},$$

$$\ln L(\theta) = -n \ln \theta + \frac{1-\theta}{\theta} \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

$$\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad \text{令 } \frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = 0,$$

$$\text{得 } \theta \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\theta} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

$$\text{故 } \theta \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\theta} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i.$$

五、(15 分)

解 (1) 因为 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1/x} Ax dy = \int_0^1 A dy = A$, 所以 $A = 1$.

(2) ①当 $0 < y < 1$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2};$$

$$\text{②当 } y \geq 1 \text{ 时, } f_Y(y) = \int_0^{\frac{1}{y}} x dx = \frac{1}{2y^2}; \quad \text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2y^2}, & y \geq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

③当 $y \leq 0$ 时, $f_Y(y) = 0$.

$$\begin{aligned} (3) \quad P\{Y \geq 2X\} &= \iint_{y \geq 2x} f(x, y) dx dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_{2x}^{1/x} x dy \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} (1 - 2x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

六、(15 分)

解 (1) 区域 D 的面积为 $S_D = 2$.

U 的所有可能取值为 $0, 1$, V 的所有可能取值为 $0, 1$, 并且

$$P\{U = -1, V = -1\} = P\{X^2 + Y^2 > 1, X > Y\} = \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{8}\right) / 2 = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{16},$$

$$P\{U = -1, V = 1\} = P\{X^2 + Y^2 > 1, X \leq Y\} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) / 2 = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16},$$

$$P\{U = 1, V = -1\} = P\{X^2 + Y^2 \leq 1, X > Y\} = \frac{\pi}{8} / 2 = \frac{\pi}{16},$$

$$P\{U = 1, V = 1\} = P\{X^2 + Y^2 \leq 1, X \leq Y\} = \frac{\pi}{8} / 2 = \frac{\pi}{16},$$

即得 (U, V) 的概率分布为

$\begin{matrix} V \\ U \end{matrix}$	-1	1
-1	$\frac{3}{4} - \frac{\pi}{16}$	$\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}$
1	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{16}$

$$(2) \quad EU = \frac{\pi}{4} - 1, \quad EV = -\frac{1}{2}, \quad E(UV) = \frac{1}{2},$$

$$\text{Cov}(U, V) = E(UV) - EU \cdot EV = \frac{\pi}{8},$$

$$EU^2 = 1, \quad DU = 1 - \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16}, \quad EV^2 = 1, \quad DV = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

$$\text{故 } \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}} = \frac{\frac{\pi}{8}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi}{\sqrt{24\pi - 3\pi^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{24 - 3\pi}}.$$

七、(15 分)

解 (1) 由题设知 $X_1 + X_2 \sim N(0, 2)$, $X_3 + X_4 \sim N(0, 2)$, $X_5 + X_6 \sim N(0, 2)$,

$$\text{则 } \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1), \quad \frac{X_3 + X_4}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1), \quad \frac{X_5 + X_6}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1),$$

且 $\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}, \frac{X_3 + X_4}{\sqrt{2}}, \frac{X_5 + X_6}{\sqrt{2}}$ 相互独立,

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{X_3 + X_4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{X_5 + X_6}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[(X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2 + (X_5 + X_6)^2 \right] \sim \chi^2(3), \end{aligned}$$

故 $c = \frac{1}{2}$, 其自由度为 3.

(2) 由题设知 $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$,

$$\text{则 } \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1), \quad E \left| \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$E\hat{\sigma} = aE|X_1 - X_2| = \sqrt{2}\sigma a E \left| \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \right| = \sqrt{2}\sigma a \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{2\sigma a}{\sqrt{\pi}} = \sigma,$$

$$\text{故 } a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$