

第六节 逆矩阵

(一) 逆矩阵的概念

在数的运算中，当数 $a \neq 0$ 时，有

$$a a^{-1} = a^{-1} a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为 a 的倒数；

单位阵 E 类似于 1 在数的乘法运算中的地位。

那么，对于矩阵 A ，如果存在一个矩阵 B ，

使得 $AB = BA = E$ ，则矩阵 B 称为 A 的逆矩阵。

定义 设 A 是 n 阶方阵, 如果存在 n 阶方阵 B , 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为可逆矩阵, 而 B 称为 A 的逆矩阵, 记为 A^{-1} .

例1 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 验证 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

解
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = E,$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = E, \quad \text{得证。}$$

例2 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A 的逆矩阵。

解 设 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是 A 的逆矩阵,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = 0, b = -1, c = 1, d = 2, \text{ 即 } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$AB = BA = E$$

定理 若矩阵 A 是可逆的, 则 A 的逆矩阵必唯一。

证 设 B 和 C 都是 A 的逆矩阵, 则

结合律

$$B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$$

问题: (1) 什么条件下 A 才可逆?

(2) 如果可逆, 如何求 A^{-1} ?

(二) 矩阵可逆的条件

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

$$AB(=BA) = E$$

上式两边取行列式,

$$|AB| = |A| \cdot |B| = |E| = 1, \Rightarrow |A| \neq 0.$$

定义 若 $|A| \neq 0$, 则称矩阵 A 是**非奇异**的(或**满秩**的);
否则称 A 为**奇异的**(或**降秩**的)。

定理 $|A| \neq 0$ 是 A 可逆的必要条件。

下面说明这个条件也是充分的。

伴随矩阵：

定义 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, A_{ij} 为 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的**伴随矩阵**。

例3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 A^* 。

解 $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5, A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 10,$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 7, A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 2, A^* = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -2, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

性质 $AA^* = A^*A = |A|E$.

证明 回忆行列式按行展开公式:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \cdots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & \cdots & \underline{a_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{a_{n1}} & \underline{a_{n2}} & \cdots & \underline{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & \mathbf{O} \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E,$$

类似地, 按列展开公式可得

$$A^*A = |A|E.$$

定理 矩阵 A 是可逆的充分必要条件是 A 非奇异, 即 $|A| \neq 0$

当 A 非奇异时, 有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$.

证 必要性: 已证;

充分性: 由 $AA^* = A^*A = |A|E$,

若 $|A| \neq 0$, 由上式得 $A \cdot (\frac{1}{|A|} A^*) = (\frac{1}{|A|} A^*)A = E$,

所以 A 可逆, 且有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

定理 矩阵 A 是可逆的充分必要条件是 A 非奇异；

当 A 非奇异时，有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$.

推论 设 A, B 均为 n 阶方阵，只要 $AB = E$ ，就有 $BA = E$ ，从而有 $B = A^{-1}$ 。

证 $AB = E \Rightarrow |A| \cdot |B| = |E| = 1$,

故 $|A| \neq 0$ ，即 A 可逆，

在 $AB = E$ 两边左乘 A^{-1} ，得 $B = A^{-1}$ ，

再右乘 A ，即得 $BA = A^{-1}A = E$ ，

由定义知， $A^{-1} = B$ 。

逆矩阵的求法—伴随矩阵法

例4 求方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. $A^* = \begin{pmatrix} -3 & & \\ -4 & & \\ & 5 & \end{pmatrix}$

解 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$

所以 A 可逆;

$$\therefore A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

同理可求得

$$A_{21} = 3, A_{22} = 0, A_{23} = -1, \quad A_{31} = 1, A_{32} = 4, A_{33} = -3.$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

对于 3 阶及以上的矩阵，用伴随矩阵法求逆矩阵较麻烦，以后将给出另一种求法——初等变换法。

练习 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可

逆，求其逆矩阵。

解 因 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$

所以 A 可逆，且逆矩阵为

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 5 & -1 & 1 \\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

例5 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $|A| = ad - bc$,

故 A 可逆的充分必要条件是 $ad - bc \neq 0$,

且 $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 对角元换位,
非对角元变号。

例如, $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$

例6 证明： 对角阵 $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 可逆的充分必要条件是 $a_i \neq 0 (i = 1, \dots, n)$, 且

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \mathbf{O} \\ & a_2 & \\ \mathbf{O} & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \mathbf{O} \\ & a_2^{-1} & \\ \mathbf{O} & & \ddots \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

例如, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \\ & & -1/3 \end{pmatrix}.$

(三) 逆矩阵的运算性质

(1) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 亦可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) 若 A 可逆, 数 $k \neq 0$, 则 kA 可逆, 且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$.

(3) 若 A, B 为同阶方阵且均可逆, 则 AB 亦可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

证 $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$.

推广: $(A_1A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

注意 A, B 可逆, $A+B$ 不一定可逆, 即使可逆, 一般

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}.$$

(4) 若 A 可逆,则 A^T 亦可逆,且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

证 $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E$. $(AB)^T = B^T A^T$

推论: 可逆阵 A 若对称(反对称),则 A^{-1} 也对称(反对称).

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}, \text{ 对称};$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}, \text{ 反对称}.$$

(5) 设 A, B, C 为同阶方阵, $AB = AC$. 若 A 可逆,则 $B = C$.

对于可逆矩阵而言, 矩阵乘法的消去律成立。

(6) 若 A 可逆,则有 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

证 $\because AA^{-1} = E, \therefore |A| \cdot |A^{-1}| = 1$, 因此 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

例7 设 n 阶矩阵 A 可逆 ($n \geq 2$), A^* 是 A 的伴随矩阵, 证明:

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

证 $A^*A = |A| \cdot E$, 两边取行列式, 得

$$|A^*| \cdot |A| = |A|^n, \text{ 而 } |A| \neq 0,$$

$$\text{所以 } |A^*| = |A|^{n-1}.$$

可以证明, 去掉 A 可逆这个条件, 上述结论仍然成立。

例8 若 A 可逆, 试证 A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$ 。

证 由 $A^* A = |A| E$,

因为 A 可逆, 故 $|A| \neq 0$ 。

$$\therefore A^* \left(\frac{1}{|A|} A \right) = E,$$

即 A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$ 。

例9 设 A 为 3 阶方阵, 且 $|A| = \frac{1}{2}$, 求行列式

$|(3A)^{-1} - 2 \cdot A^*|$ 的值。(其中 A^* 为 A 的伴随矩阵)

解 $A^* = |A| \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} A^{-1},$

$$\therefore |(3A)^{-1} - 2A^*| = \left| \frac{1}{3} \cdot A^{-1} - A^{-1} \right| = \left| -\frac{2}{3} \cdot A^{-1} \right|$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 |A^{-1}| = -\frac{8}{27} \cdot |A|^{-1} = -\frac{8}{27} \cdot 2 = -\frac{16}{27}.$$

例10 设 $P = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$, 其中 A 和 B 都是可逆方阵,

证明 P 可逆, 并求 P^{-1} .

解 由 A, B 可逆, 有 $|P| = |A| \cdot |B| \neq 0$, 得 P 可逆.

$$\text{设 } P^{-1} = \begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } PP^{-1} &= \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AX + CW & AZ + CY \\ BW & BY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} AX + CW & AZ + CY \\ BW & BY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AX + CW = E, \\ AZ + CY = O, \\ BW = O, \\ BY = E. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = A^{-1}, \\ Z = -A^{-1}CB^{-1}, \\ W = O, \\ Y = B^{-1}, \end{cases}$$

$$AZ + CY = O, \Rightarrow AZ = -CY,$$

$$\text{因此 } P^{-1} = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

类似有 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$

特别, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$

另外,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

一般地，有

若 $A_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 均可逆，则有

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \mathbf{0} \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ \mathbf{0} & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ A_s & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ \mathbf{0} & & & \\ & A_{s-1}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ A_1^{-1} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

例11 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}$,
 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$

例12 利用矩阵分块的方法，求下列矩阵的逆矩阵：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & a_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{解 利用 } \begin{pmatrix} \mathbf{O} & A \\ B & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & B^{-1} \\ A^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} & (a_i \neq 0, i = 1, \cdots, n) \\ \text{所以 } & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & a_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$