

第八节 矩阵的秩

定义 在 $m \times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列 ($k \leq m$, $k \leq n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式, 称为矩阵 A 的 k 阶子式.

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$

第八节 矩阵的秩

定义 在 $m \times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列 ($k \leq m$, $k \leq n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式, 称为矩阵 A 的 k 阶子式.

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6.$

$m \times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k \cdot C_n^k$ 个.

定义 设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D , 且所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全等于 0 , 那末 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式, 数 r 称为矩阵 A 的秩, 记作秩 (A) 或 $r(A)$.

矩阵 A 的秩 $r(A)$ 即为 A 中非零子式的最高阶数.

零矩阵的秩规定为 0 。

矩阵秩的性质：

- (1) 若 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$ ；
 - (2) $r(A^T) = r(A)$ ； $r(kA) = r(A) (k \neq 0)$ ；
 - (3) 若 A 有一个 r 阶子式不为零，则 $r(A) \geq r$ ；
若 A 的所有 $r+1$ 阶子式全为零，则 $r(A) \leq r$ ；
 - (4) 对于 n 阶方阵 A 而言，有 $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$ ；
 $r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0$ ；
- 可逆矩阵也称为 **满秩矩阵**。

定理 矩阵经初等变换后，其秩不变。

(5) 设 P, Q 为可逆阵, 则 $r(PA) = r(A), r(AQ) = r(A)$.

事实上，因为 P, Q 均可逆，用 P 左乘 A ，或用 Q 右乘 A ，相当于对 A 施以一系列初等行变换和初等列变换，并不改变 A 的秩。

定理 同型的两个矩阵等价的充分必要条件是它们的秩相等。

必要性是因为初等变换不改变矩阵的秩；

设 $r(A) = r(B) = r$ ，则 A 和 B 都与 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 等价，

由矩阵等价的对称性和传递性知 A 与 B 等价。

例1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 在 A 中, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

又 $\because A$ 的 3 阶子式只有一个 $|A|$, 且 $|A| = 0$,

$\therefore r(A) = 2$.

例2 求矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩。

解 $\because B$ 是一个行阶梯形矩阵，其非零行有3行，
 $\therefore B$ 的所有4阶子式全为零。

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \therefore r(B) = 3.$

若矩阵的每行第一个非零元的下方及左下方全为零，
则称之为**阶梯形矩阵**。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

下面矩阵是阶梯形矩阵吗？

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

不是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是

阶梯形矩阵的性质：

- (1) 阶梯形矩阵的秩等于其中非零行的行数。
- (2) 任意一个矩阵都可以经过一系列的初等行变换化为阶梯形矩阵；

初等变换不改变矩阵的秩；

矩阵秩的计算方法：

用初等行变换把矩阵化为阶梯形，则该阶梯形矩阵中的非零行数就是所求矩阵的秩。

例3 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的秩.

解

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_3 - 3r_2 \\ r_4 - 4r_2 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-8} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-8} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\therefore r(A) = 3.$$

例4 求下列矩阵的秩：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \text{ 是参数。}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix} \quad ?$$

例4 求下列矩阵的秩：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \text{ 是参数。}$$

解 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (2a+1) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2(2a+1),$

(1) $a \neq 1$ 且 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时, $|A| \neq 0$, $\therefore r(A) = 3$

例4 求下列矩阵的秩:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \text{ 是参数。}$$

解 $|A| = (1-a)^2(2a+1),$

(2) $a = 1$ 时,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \therefore r(A) = 1;$$

例4 求下列矩阵的秩:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \text{ 是参数.}$$

解 $|A| = (1-a)^2(2a+1)$, (3) $a = -\frac{1}{2}$ 时,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\therefore r(A) = 2.$$

P91, 45、

设 A 为 n 阶矩阵, 存在正整数 $k > 1$, 使 $A^k = O$
(称 A 为幂零矩阵), 证明: $E - A$ 可逆, 且

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

证 $(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = E - A^k = E,$

所以 $E - A$ 可逆, 且有

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$