

教材：

《线性代数》

主编 赵树嫖

（第五版）

中国人民大学出版社

第二节 n 阶行列式

(一) 排列与逆序

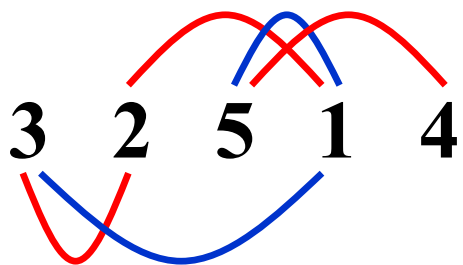
由 n 个不同数码 $1, 2, \dots, n$ 组成的有序数组 $i_1 i_2 \dots i_n$, 称为一个 n 级排列.

n 级排列共有 $n!$ 个.

定义 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 中, 如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面 ($i_s < i_t$), 则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数, 称为它的逆序数, 记为 $N(i_1 i_2 \dots i_n)$.

如果排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 的逆序数 $N(i_1 i_2 \dots i_n)$ 是奇数, 则称为奇排列, 是偶数或0则称为偶排列.

例 排列32514 中,



$N(32514) = 5$, 奇排列

例 $N(12345) = 0$, n 元自然序排列, 偶排列

例 $N(n(n-1)\cdots 21)$

$$= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时, $n(n-1)\cdots 21$ 是偶排列;

当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时, $n(n-1)\cdots 21$ 是奇排列.

3级排列共有 $3! = 6$ 种. 其排列情况见下表:

排列	逆序	逆序数	奇偶性
1 2 3	无	0	偶排列
1 3 2	32	1	奇排列
2 1 3	21	1	奇排列
2 3 1	21, 31	2	偶排列
3 1 2	31, 32	2	偶排列
3 2 1	21,31,32	3	奇排列

在一个排列 $i_1 \dots i_s \dots i_t \dots i_n$ 中，如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调，其它数码不变，得到另一个排列，这样的变换，称为一个对换。

定理 任一排列经过一次对换后改变奇偶性。

定理 n 个数码($n > 1$)共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半。

第一节 二阶、三阶行列式

(一) 二阶行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \times a_{22} : a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2) \times a_{12} : a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去 x_2 , 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地，消去 x_1 ，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

所以当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

定义 引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

称为二阶行列式.

二阶行列式的计算——对角线法则

主对角线

次对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

称系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

若 $D \neq 0$ ，则方程组有唯一解 $x_1 = \frac{D_1}{D}$ ， $x_2 = \frac{D_2}{D}$ ，

---克莱姆法则

例 $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - (-1) \times 3 = 13.$

例 设 $D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ 。问：(1) 当 λ 为何值时， $D = 0$ ；

(2) 当 λ 为何值时， $D \neq 0$ 。

解 $D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3),$

(1) 当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$ 时， $D = 0$ ；

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 3$ 时， $D \neq 0$ 。

例 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

(二) 三阶行列式

三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})x_3 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \quad \times a_{32} \\ (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})x_2 + (a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33})x_3 = a_{31}b_1 - a_{11}b_3 \quad \times (-a_{22}) \\ (a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32})x_2 + (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})x_3 = a_{31}b_2 - a_{21}b_3 \quad \times a_{12} \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{b_1 a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31} b_1 - a_{11} a_{32} b_2 + a_{12} a_{31} b_2 + a_{11} a_{22} b_3 - a_{12} a_{21} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

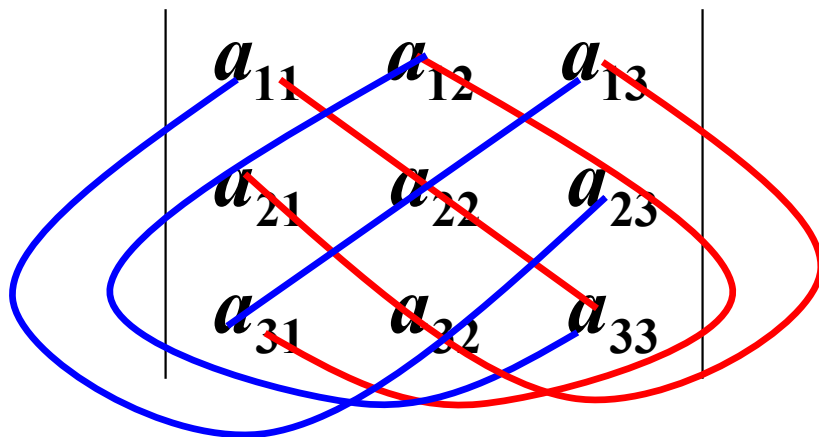
$$x_3 = \frac{b_1 a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31} b_1 - a_{11} a_{32} b_2 + a_{12} a_{31} b_2 + a_{11} a_{22} b_3 - a_{12} a_{21} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

定义 引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31},$$

称为三阶行列式。

对角线法则



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

说明： 1、三阶行列式包括3!项，每一项都是位于不同行，不同列的三个元素的乘积，其中三项为正，三项为负。

2、对角线法则只适用于二阶与三阶行列式。

利用三阶行列式求解三元线性方程组—克莱姆法则

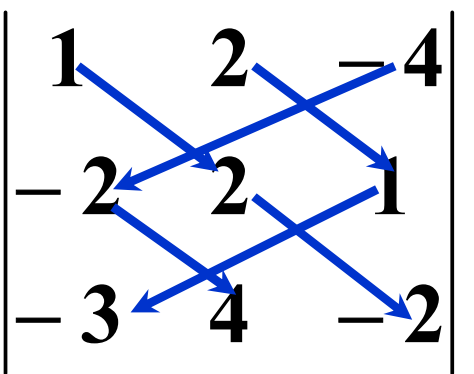
如果三元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$

记 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$

则该方程组的解为 $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}.$

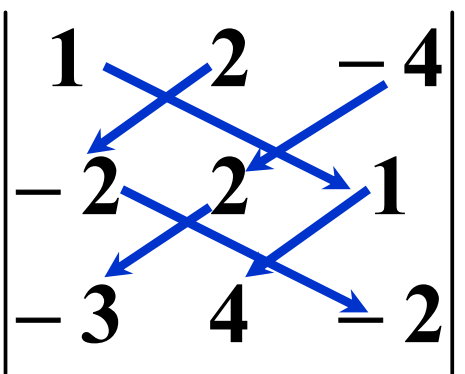
例 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$


解 按对角线法则，有

$$D = 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4$$

例 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$


解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4 \\ &\quad - (-4) \times 2 \times (-3) - 2 \times (-2) \times (-2) - 1 \times 1 \times 4 \\ &= -14. \end{aligned}$$

练习

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \times 0 \times 6 + 2 \times 5 \times (-1) + 3 \times 4 \times 0 \\ &\quad - 1 \times 5 \times 0 - 2 \times 4 \times 6 - 3 \times 0 \times (-1) \\ &= -1 - 48 = -58. \end{aligned}$$

例 实数 a, b 满足什么条件时, 有 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$?

解 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2,$

所以当且仅当 $a = b = 0$ 时, 所给行列式等于零。

例 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

解 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1 > 0, \quad |a| > 1,$

即为所求充分必要条件。

练习 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解 方程左端

$$\begin{aligned} D &= 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 \\ &= x^2 - 5x + 6, \end{aligned}$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 解得

$$x = 2 \text{ 或 } x = 3.$$

例 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

故方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

(二) n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- (1) 三阶行列式共有 $3! = 6$ 项.
- (2) 每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.
- (3) 每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列.

例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 列标排列312是偶排列, + 正号

$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标排列132是奇排列, - 负号,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= \sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^{t(p_1 p_2 p_3)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} a_{3 p_3} \cdot$$

定义 用 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{简记作 } \det(a_{ij}). \\ \text{determinant} \end{array}$$

定义为
$$= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{N(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列,

$N(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为这个排列的逆序数.

n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和, 每项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积.

例如，四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中 $4! = 24$ 项.

例如, $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 项取 **+** 号,

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 项取 **-** 号,

$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 不是 D 的项.

例 计算上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 D 中各项中不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ ，其他项均为零，由于 $N(12\dots n) = 0$ ，因此这一项取正号，得

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

特殊情况：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

这种行列式称为**对角行列式**。

例 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 $D = (-1)^{N(4321)} abcd$
 $= abcd \quad .$

练习：推广到 n 阶情况。

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

$$\mathcal{N}(n(n-1)\cdots 2\,1) = \frac{n(n-1)}{2}$$