

第一节 矩阵的特征值与特征向量

(一) 矩阵的特征值

定义 设 A 是一个 n 阶方阵，如果存在一个数 λ ，以及一个非零 n 维列向量 α ，使得

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 为矩阵 A 的**特征值**，而 α 称为矩阵 A 的属于特征值 λ 的**特征向量**。

说明： 1、特征值问题是针对**方阵**而言的；

2、特征向量必须是**非零**向量；特征向量既依赖于矩阵 A ，又依赖于特征值 λ ；

3、 λ 可为零，可不唯一。

特征值与特征向量的计算方法：

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow (\lambda E - A)\alpha = \theta,$$

即要求齐次线性方程组 $(\lambda E - A)x = \theta$ 有非零解，

即方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的根就是矩阵 A 的特征值，

相应齐次线性方程组的**非零解**即为特征向量。

定义： 设 A 为 n 阶矩阵，则

- 1、 $\lambda E - A$ 称为 A 的特征矩阵；
- 2、 $|\lambda E - A|$ 称为 A 的特征多项式；
- 3、 $|\lambda E - A| = 0$ 称为 A 的特征方程；
- 4、 $|\lambda E - A| = 0$ 的根称为特征根，或特征值；
- 5、 $(\lambda E - A)X = 0$ 的每一个非零解都是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

计算矩阵特征值和特征向量的一般步骤如下：

1、求特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的全部根，即为矩阵 A 的全部特征值；

2、对每一特征值 λ_i ，求出齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)x = 0$$

的一个基础解系 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ ，其中 r 为 $\lambda_i E - A$ 的秩；

则 A 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$$k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_{n-r} \eta_{n-r},$$

其中 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 为不全为零的任意数。

例1 设 $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值与特征向量。

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & -7 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16 - 7$
 $= (\lambda - 1)(\lambda - 9) = 0,$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$.

对 $\lambda_1 = 1$, $E - A = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

因此属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的全部特征向量为 $k_1 \alpha_1 (k_1 \neq 0)$;

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & -7 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9.$$

$$\text{对 } \lambda_2 = 9, \quad 9E - A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$,

因此属于特征值 $\lambda_2 = 9$ 的全部特征向量为 $k_2 \alpha_2 (k_2 \neq 0)$.

例2 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值与特征向量。

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1.$$

$$\text{对 } \lambda_1 = 2, \quad 2E - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{相应齐次线性方程组的基础解系为 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

因此属于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量为 $k_1 \alpha_1 (k_1 \neq 0)$;

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1.$$

$$\text{对 } \lambda_2 = -1, -E - A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{相应齐次线性方程组的基础解系为 } \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此属于特征值 $\lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为 $k_2 \alpha_2 (k_2 \neq 0)$;

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1.$$

$$\text{对 } \lambda_3 = 1, E - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{相应齐次线性方程组的基础解系为 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此属于特征值 $\lambda_3 = 1$ 的全部特征向量为 $k_3 \alpha_3 (k_3 \neq 0)$ 。

例3 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值与特征向量。

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda - 2)^2 (\lambda + 1) = 0,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$ (二重根), $\lambda_2 = -1$.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix}, \lambda_1 = 2(\text{二重根}), \lambda_2 = -1.$$

$$\text{对 } \lambda_1 = 2, 2E - A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应齐次线性方程组的基础解系为

$$\alpha_1 = (1, 0, 4)^T, \alpha_2 = (0, 1, -1)^T,$$

因此属于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量为

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \text{ } (k_1, k_2 \text{ 不全为零);$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix}, \lambda_1 = 2(\text{二重根}), \lambda_2 = -1.$$

$$\text{对 } \lambda_2 = -1, -E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应齐次线性方程组的基础解系为

$$\alpha_3 = (1, 0, 1)^T,$$

因此属于特征值 $\lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为 $k_3 \alpha_3 (k_3 \neq 0)$.

练习 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 。

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

对 $\lambda_1 = 2$,

$$2E - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_1 = (0, 0, 1)^T$,

因此属于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量为 $c_1 \alpha_1$ (c_1 为任意非零常数)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$,

$$E - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_2 = (-1, -2, 1)^T$,

因此属于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的全部特征向量为 $c_2 \alpha_2$
(c_2 为任意非零常数)

练习 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

$c_1 - c_3$

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 & -4 \\ 0 & \lambda & -2 \\ -\lambda - 1 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 8),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 8$ 。

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 8$$

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$,

$$-E - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应齐次线性方程组的基础解系为

$$\alpha_1 = (-1, 2, 0)^T, \quad \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T,$$

因此属于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$
(c_1, c_2 为不全为零的任意常数)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 8$$

对 $\lambda_3 = 8$,

$$8E - A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 18 & -9 \\ 0 & -18 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_3 = (2, 1, 2)^T$,

因此属于特征值 $\lambda_3 = 8$ 的全部特征向量为 $c_3 \alpha_3$ (c_3 为任意非零常数)

n阶方阵有n个特征值，可以是实数，可以是复数，重根按重数计算。
实数方阵不一定有实数特征值。

例： $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -5 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 + 5 \\ &= \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

A 没有实数特征值。

对角阵、上三角阵、下三角阵，它们的特征值即为主对角元。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{0} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(二) 特征值与特征向量的基本性质

性质1 (1) 设 α 是矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量, 则对任意常数 $k \neq 0$, $k\alpha$ 也是 A 的属于 λ_0 的特征向量;
(2) 若 α, β 都是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量, 则 $k\alpha + l\beta$ (k, l 不全为零) 也是 A 的属于 λ_0 的特征向量。

证 $A\alpha = \lambda\alpha$

$$\Rightarrow A(k\alpha) = k(A\alpha) = k(\lambda\alpha) = \lambda(k\alpha).$$

$$A\alpha = \lambda\alpha, A\beta = \lambda\beta$$

$$\Rightarrow A(k\alpha + l\beta) = kA\alpha + lA\beta = k\lambda\alpha + l\lambda\beta = \lambda(k\alpha + l\beta).$$

(2) 可推广到多个特征向量。

例6 证明：n阶矩阵A是奇异矩阵的充分必要条件是A有零特征值。

证明： $\Rightarrow$ A是奇异矩阵，则 $|A| = 0$ ，于是

$$|0E - A| = |-A| = (-1)^n |A| = 0$$

即0是A的特征值

$\Leftarrow$ 设0是A的特征值，对应的特征向量为 α

由特征值定义，有 $A\alpha = 0\alpha = 0$ ($\alpha \neq 0$)

所以齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解 α ，

所以 $|A| = 0$ ，即A是奇异阵。

结论： n阶矩阵A可逆的充要条件是它的任一特征值不为零。

性质2 设 λ_0 是矩阵 A 的特征值, α 是相应的特征向量, 则

- (1) $k\lambda_0$ 是 kA 的特征值 (k 是任意常数);
- (2) λ_0^m 是 A^m 的特征值 (m 是正整数);
- (3) 当 A 可逆时, $\lambda_0 \neq 0$, 且 λ_0^{-1} 是 A^{-1} 的特征值.
- (4) 当 A 可逆时, $\frac{|A|}{\lambda_0}$ 是 A^* 的特征值, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵;
- (5) $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值。

且 α 仍然是矩阵 kA 、 A^m 、 A^{-1} 的相应于特征值 $k\lambda_0$ 、 λ_0^m 、 λ_0^{-1} 的特征向量。

定理4.1 矩阵 A 与它的转置 A^T 有相同的特征值。

证 $|\lambda E - A^T| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A|,$

说明 A 与 A^T 有相同的特征多项式,
从而有相同的特征值。

注意: 尽管 A 和 A^T 的特征值相同,但一般它们的特征向量是不同的。

定理4.3 对应于不同特征值的特征向量线性无关。

推广 对应于各个特征值的线性无关的向量合在一起仍线性无关。

矩阵的特征多项式的性质：

n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

λ 的最高次项必在 $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$ 中出现,

其余的项 λ 的次数最高是 $n-2$,

故有 $f(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots$,

而常数项等于 $f(0) = |-A| = (-1)^n |A|$,

所以 $f(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$.

$$f(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

另一方面, 设矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \end{aligned}$$

比较系数得

trace

定理4.4 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (其中可能有重根/复根), 则

$$(1) \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}; \quad (2) \prod_{i=1}^n \lambda_i = |A|.$$

$\sum_{i=1}^n a_{ii}$ 称为 A 的**迹**, 记为 $\text{tr}(A)$.

第二节 相似矩阵与矩阵对角化

(一) 相似矩阵及其性质

定义 对于 n 阶方阵 A 和 B , 若存在 n 阶**可逆**方阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 与 B **相似**, 记为 $A \sim B$.

例如 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $A \sim B$.

$$B = P^{-1}AP$$

矩阵的“相似”关系具有以下特性：

(1) 反身性：对任何方阵 A ，总有 $A \sim A$ (令 $P = E$ 即可)；

(2) 对称性：若 $A \sim B$ ，则有 $B \sim A$ ；

证 $P^{-1}AP = B \Rightarrow A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}.$

(3) 传递性：若 $A \sim B$ ，且 $B \sim C$ ，则有 $A \sim C$ 。

证 $P^{-1}AP = B, Q^{-1}BQ = C$

$$\Rightarrow Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ) = C.$$

相似矩阵的性质：

性质1 相似矩阵的行列式值相等；相似矩阵同时可逆，同时不可逆；可逆时其逆矩阵相似，伴随矩阵也相似。

性质2 相似矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值。但特征向量不一定相同。

证 $A \sim B$ ，则存在可逆阵 P ，使 $P^{-1}AP = B$

$$\Rightarrow |\lambda E - B| = |\lambda E - P^{-1}AP|$$

$$= |P^{-1}(\lambda E - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda E - A| \cdot |P| = |\lambda E - A|.$$

性质3 相似矩阵的幂相似;

即 $A \sim B$ 则 $A^k \sim B^k$

性质4 相似矩阵的秩相同;

性质5 相似矩阵的迹相同;

注意: 特征值相同的矩阵不一定相似。

相似矩阵的其他性质：

若 $A \sim B$, 则

- (1) $A^T \sim B^T$;
- (2) $kA \sim kB$, 其中 k 为任意常数;
- (3) $p(A) \sim p(B)$, 其中 $p(x)$ 为任一多项式;
- (4) 它们的特征矩阵 $\lambda E - A$ 和 $\lambda E - B$ 也相似;

例1 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, 且 $A \sim B$, 求 a, b 。

解
$$\left. \begin{array}{l} |A| = |B| \Rightarrow 3a - 4 = b \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \Rightarrow 5 + a = 3 + b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}.$$