

(二) 矩阵与对角矩阵相似的条件

如果一个矩阵能与一个对角阵相似, 称该矩阵可以(相似) **对角化**。

定理4.6 n 阶矩阵 A 与一个对角阵相似的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

证 必要性: 设 A 与一个对角阵相似, 即存在一个可逆阵 P , 使

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \Lambda, \quad \text{即} \quad AP = P\Lambda,$$

将矩阵 P 按列分块, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 则有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$\text{即} \quad (A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n),$$

$$\text{即得} \quad A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

说明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 A 的分别对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的特征向量,

由于 P 可逆, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。必要性得证。

上述步骤倒过来写, 即得充分性证明。

推论 如果矩阵 A 的特征值互不相同，则 A 必可对角化。

因为属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

注意：这个条件是充分的而不是必要的。

如果 A 的特征方程有**重根**，此时不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而矩阵 A 不一定能对角化；但如果能找到 n 个线性无关的特征向量， A 还是能对角化。

定理4.7 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：对每一个 n_i 重的特征值 λ_i ，矩阵 $\lambda_i E - A$ 的秩为 $n - n_i$. （证略）

练习 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, 求可逆阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -\lambda - 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - 3 & -3 \\ -3 & -6 & \lambda - 6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -3 \\ -6 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 9),$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 9),$$

$$\text{对 } \lambda_1 = 0, \quad 0E - A = -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

特征向量 $\alpha_1 = (-1, -1, 1)^T$,

$$\text{对 } \lambda_2 = -1, \quad -E - A = -\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

特征向量 $\alpha_2 = (-1, 1, 0)^T$,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 9),$$

特征向量 $\alpha_1 = (-1, -1, 1)^T$,

特征向量 $\alpha_2 = (-1, 1, 0)^T$,

$$\text{对 } \lambda_3 = 9, 9E - A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 11 & -6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

特征向量 $\alpha_3 = (1, 1, 2)^T$,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 9),$$

$$\alpha_1 = (-1, -1, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 1, 2)^T,$$

$$\text{令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 9 \end{pmatrix}.$$

例2 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 能否对角化, 若能,

求可逆阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 10 & 0 \\ -1 & \lambda - 3 & 0 \\ -3 & -6 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2),$

对 $\lambda_1 = 1$, $E - A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 可对角化,

特征向量 $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 0, 1)^T$,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 10 & 0 \\ -1 & \lambda - 3 & 0 \\ -3 & -6 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2),$$

对 $\lambda_1 = 1$, $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 0, 1)^T$,

$$\text{对 } \lambda_2 = -2, -2E - A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

特征向量 $\alpha_3 = (-5, 1, 3)^T$,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$

例3 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 能否对角化, 若能,

求可逆阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

$c_1 - c_2$

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2,$

对 $\lambda_1 = 2$, $2E - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

只有一个线性无关的特征向量, 所以不能对角化。

例4 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 能否对角化，并求 A^5 。

$c_3 + c_2$

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 2 & \lambda - 4 & \lambda - 2 \\ 2 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 。

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$,

$$2E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应齐次线性方程组的基础解系为

$$\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (-1, 0, 1)^T;$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

对 $\lambda_1 = 1$,

$$E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_1 = (1, 2, 2)^T$;

$$\alpha_1 = (1, 2, 2)^T, \quad \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (-1, 0, 1)^T;$$

$$\text{令 } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{有 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{可求得 } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{于是 } A^5 = P \Lambda^5 P^{-1}$$

于是 $A^5 = P \Lambda^5 P^{-1}$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 32 & \\ & & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 31 & -31 \\ -62 & 94 & -62 \\ -62 & 62 & -30 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

练习 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{100} .

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1),$

$$\text{对 } \lambda_1 = 3, \quad 3E - A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{对 } \lambda_2 = -1, \quad -E - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \\ & -\mathbf{1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{100} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^{100} \mathbf{P}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{3}^{100} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{3}^{100} + \mathbf{1} & \mathbf{3}^{100} - \mathbf{1} \\ \mathbf{3}^{100} - \mathbf{1} & \mathbf{3}^{100} + \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

第三节 实对称矩阵的特征值和特征向量

(一) 向量内积

定义 给定 R^n 中向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \quad \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T,$$

实数 $\alpha^T \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

称为向量 α 和 β 的**内积**，记作 (α, β) 。

例如，设 $\alpha = (-1, 1, 0, 2)^T$ ， $\beta = (2, 0, -1, 3)^T$ ，则

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = (-1) \times 2 + 1 \times 0 + 0 \times (-1) + 2 \times 3 = 4$$

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

向量的内积具有如下基本特性：

- (1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;
- (2) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;
- (3) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$ (k 为实数);
- (4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时 $(\alpha, \alpha) = 0$.

向量的长度：

定义 设 α 为 n 维实向量，将非负实数 $\sqrt{\alpha^T \alpha}$ 定义为 α 的**长度**，记为 $\|\alpha\|$ ，即若 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ ，则有

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

例1 设向量 $\alpha = (1, -2, 2)^T$ ，则 α 的长度为

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$$

不难看出，若把三维向量 α 看作空间中一个点的坐标， $\|\alpha\|$ 就是该点到原点的距离。 n 维向量的长度则是这一概念的推广。

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

向量的长度具有如下性质：

- (1) $\|\alpha\| \geq 0$ ，当且仅当 $\alpha = 0$ 时 $\|\alpha\| = 0$ ；
- (2) $\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$ (k 为实数)；
- (3) 对于任意向量 α, β ，有 $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$ ；
- (4) 对于任意向量 α, β ，有 $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ 。

证略

长度为1的向量称为单位向量。

例2 证明：对任意非零向量 α ， $\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 为单位向量。

证 因为 $\left\| \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha \right\| = \frac{1}{\|\alpha\|} \cdot \|\alpha\| = 1,$

所以 $\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 为单位向量。

这种把非零向量 α 乘以 $\frac{1}{\|\alpha\|}$ 使之成为单位向量的做法称作把向量 α 单位化。

(二) 正交向量组

定义 当 $(\alpha, \beta) = 0$ 时，称向量 α 与 β 正交。

例如，设 $\alpha = (-2, 1)^T$ ， $\beta = (1, 2)^T$ ，则 $(\alpha, \beta) = 0$ ，即 α 与 β 正交。

其几何意义是，在坐标平面上，连结原点和点 $(-2, 1)$ ， $(1, 2)$ 的两个有向线段是相互垂直的。两个 n 维向量正交的概念是这一事实的推广。

显然零向量与任何向量都正交，即

$$(\theta, \beta) = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \cdots + 0 \cdot b_n = 0$$

例3 设 $\alpha = (-1, 0, 3)^T$, $\beta = (1, -2, 1)^T$, 求一个 3 维单位向量 γ , 使它与向量 α, β 都正交。

解 设 $\gamma = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$\begin{cases} (\alpha, \gamma) = -x_1 + 3x_3 = 0 \\ (\beta, \gamma) = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

解齐次线性方程组得通解为 $k(3, 2, 1)^T$,

特别取 $k = 1$, 得 $\eta = (3, 2, 1)^T$,

将其单位化, 得 $\gamma = \frac{1}{\|\eta\|} \eta = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right)^T$

定义 若向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($\alpha_i \neq \mathbf{0}, i = 1, 2, \dots, s$) 两两正交, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为**正交向量组**;
进一步, 若向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 全是单位向量, 则称之为**标准正交向量组**.

例如, $\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)^T$ 就是一组标准正交向量组.

定理4.9 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是正交向量组, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

证 设有数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \theta,$$

任取向量 α_i ($1 \leq i \leq s$), 与上式两端作内积, 得

$$k_1(\alpha_i, \alpha_1) + \dots + k_i(\alpha_i, \alpha_i) + \dots + k_s(\alpha_i, \alpha_s) = 0,$$

由于 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ ($j \neq i$), 所以 $k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0$,

而 $\alpha_i \neq \theta, (\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$, 所以 $k_i = 0$,

由 α_i 的任意性, 可得 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$,

即证得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

上述定理说明：一个向量组线性无关是该向量组为正交向量组的必要条件。但定理显然不是可逆的。

然而，对于任一线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ，我们可以求出一个与之等价的正交向量组。这一方法称为施密特正交化方法。

施密特正交化方法

施密特正交化方法是将一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 转化为与之等价的一组标准正交向量的方法，具体程序如下：

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2, \quad \dots\dots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})} \beta_{s-1}.$$

容易证明， $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是一组两两正交的向量。再将它们单位化，就得到一组标准正交组。

例4 将向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
标准正交化。

解 $\beta_1 = \alpha_1,$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta'_2)}{(\beta'_2, \beta'_2)} \beta'_2$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-5}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{62}$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

再单位化,

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 即为所求.

练习 将向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

正交化。

解 $\beta_1 = \alpha_1$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

练习 将向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

正交化。

解

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{12}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-32}{16} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(三) 正交矩阵

定义 若 n 阶实矩阵 Q 满足

$$Q^T Q = E,$$

则称 Q 为**正交矩阵**。

显然 $Q^T Q = E \Leftrightarrow Q Q^T = E$.

例5 单位矩阵 E 是正交矩阵。

例6 $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$, 可以验证 $Q^T Q = E$, 所以 Q 是一个正交矩阵。

正交矩阵的基本性质：

$$Q^T Q = E$$

- (1) 若 Q 为正交矩阵, 则 Q 的行列式之值为 1 或 -1 ;
- (2) 若 Q 为正交矩阵, 则 Q 可逆, 且 $Q^{-1} = Q^T$;
逆命题也对;
- (3) 若 P 与 Q 都是 n 阶正交矩阵, 则 PQ 也是 n 阶正交矩阵.

证
$$(PQ)^T(PQ) = Q^T P^T PQ = Q^T (P^T P) Q$$
$$= Q^T E Q = Q^T Q = E,$$

所以 PQ 是正交矩阵。

例7 设 A, B 均是 n 阶正交阵, 且 $|A| \neq |B|$, 求 $|A+B|$.

解 因为 A, B 是正交阵, 即 $A^T A = E, B^T B = E$,

且 $|A| = \pm 1, |B| = \pm 1$,

因 $|A| \neq |B|$, 所以 $|A| = -|B|$, 即 $|A| \cdot |B| = -1$,

$$|A+B| = -|A^T(A+B)B^T| = -|A^T A B^T + A^T B B^T|$$

$$= -|B^T + A^T| = -|A+B|,$$

所以 $|A+B| = 0$.

例8 设 α 是 n 维单位列向量, 证明: $A = E - 2\alpha\alpha^T$ 是对称正交阵.

证 $A^T = E^T - 2(\alpha\alpha^T)^T = E - 2\alpha\alpha^T = A,$

故 A 为对称阵;

$$A^T A = (E - 2\alpha\alpha^T)(E - 2\alpha\alpha^T)$$

$$= E - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T$$

$$= E,$$

即 A 为正交阵。

$$\alpha^T \alpha = \|\alpha\|^2 = 1$$

定理4.10 n 阶矩阵 Q 为正交矩阵的充分必要条件是 Q 的列(行)向量组是标准正交组。

证 记 $Q = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$,

$$\text{则 } Q^T Q = \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \vdots \\ \eta_n^T \end{pmatrix} (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = \begin{pmatrix} \eta_1^T \eta_1 & \eta_1^T \eta_2 & \cdots & \eta_1^T \eta_n \\ \eta_2^T \eta_1 & \eta_2^T \eta_2 & \cdots & \eta_2^T \eta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_n^T \eta_1 & \eta_n^T \eta_2 & \cdots & \eta_n^T \eta_n \end{pmatrix}$$

所以 $Q^T Q = E \Leftrightarrow$

$$\eta_i^T \eta_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \quad \text{即 } Q \text{ 的列向量组是标准正交组;}$$

利用 $Q Q^T = E$ 即得行向量组的情况。

Q 为正交矩阵的充要条件是下列条件之一成立:

(1) $QQ^T = E$;

(2) $Q^T Q = E$;

(3) $Q^{-1} = Q^T$;

(4) Q 的列向量是两两正交的单位向量;

(5) Q 的行向量是两两正交的单位向量。

(四) 实对称矩阵的特征值和特征向量

并非所有方阵都可对角化,但是实对称矩阵必可对角化。

定理4.11 实对称矩阵的特征值都是实数。 证略

定理4.12 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量彼此正交。

证 只证两个特征向量的情况。

设 A 是一个实对称矩阵, $A\alpha = \lambda\alpha$, $A\beta = \mu\beta$, $\lambda \neq \mu$,

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha, \beta) &= (\lambda\alpha, \beta) = (A\alpha, \beta) = (A\alpha)^T \beta = \alpha^T A^T \beta \\ &= \alpha^T A\beta = (\alpha, A\beta) = (\alpha, \mu\beta) = \mu(\alpha, \beta),\end{aligned}$$

$$\therefore (\lambda - \mu)(\alpha, \beta) = 0, \text{ 而 } \lambda \neq \mu, \therefore (\alpha, \beta) = 0.$$

定理4.13 设 A 是一个实对称矩阵，则存在 **正交矩阵** Q ，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵。 **证略**

具体计算步骤如下：

(1) 求出实对称矩阵 A 的全部特征值；

(2) 若特征值是**单根**，则求出一个线性无关的特征向量，并加以**单位化**；

若特征值是**重根**，则求出重数个线性无关的特征向量，然后用**施密特正交化**方法化为正交组，再单位化；

(3) 将这些两两正交的单位特征向量按**列**拼起来，就得到了正交矩阵 Q 。

例9 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, 求正交阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵。

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 9),$

$$\lambda_1 = 0, \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 9, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

再单位化, $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

于是所求正交阵为

$$Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

使 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 9 \end{pmatrix}.$

练习 设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 Q ,

使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

$$c_1 - 2c_2 + 2c_3$$

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 & 0 \\ -2(\lambda - 5) & \lambda - 2 & 2 \\ 2(\lambda - 5) & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda - 5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 2 \\ 0 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda - 2)(\lambda + 1),$$

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 5)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

$$\lambda_1 = 5, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = -1, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

再单位化，拼起来得

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \text{使 } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

例10 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求正交阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵。

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 6 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 2 & 4 \\ 0 & \lambda - 6 & 2 \\ 7 - \lambda & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda + 2)(\lambda - 7)^2,$$

对 $\lambda_1 = -2$, $-2E - A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

特征向量 $\alpha_1 = (2, 1, 2)^T,$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 6 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 7)^2,$$

$$\text{对 } \lambda_2 = 7, 7E - A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

特征向量 $\alpha_2 = (-1, 2, 0)^T$, $\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$,

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \beta'_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta'_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

再单位化，拼起来得

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{\sqrt{45}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}.$$

使 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 7 & \\ & & 7 \end{pmatrix}.$

练习 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 求正交阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵。

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2\lambda - 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda - 1)^2(\lambda - 10),$

对 $\lambda_{1,2} = 1$, $E - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

特征向量 $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (2, 0, 1)^T$,

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (2, 0, 1)^T,$$

正交化,

$$\alpha'_2 = (2, 0, 1)^T - \frac{-4}{5}(-2, 1, 0)^T = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T,$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10),$$

$$\text{对 } \lambda_3 = 10, \quad 10E - A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

特征向量 $\alpha_3 = (1, 2, -2)^T$,

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \alpha'_2 = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T, \quad \alpha_3 = (1, 2, -2)^T,$$

单位化，拼起来得

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix},$$

使 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}.$