线性代数习题册

2023 年修订版

数据科学与人工智能学院编

§1.1　二阶、三阶行列式
§1.2　n 阶行列式

一、填空

1．排列 6573412 的逆序数是__________.

2．排列 $(2n)(2n-2)\cdots 2$ 的逆序数为__________.

3．排列 $1\quad 3\quad \cdots\quad (2n-1)\quad 2\quad 4\quad \cdots\quad (2n)$ 的逆序数为__________.

4．已知 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 在四阶行列式中带负号，则 $j=$________，$k=$________.

5．已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 是关于 x 的一次多项式，该式中 x 的系数为__________.

6．函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数是__________.

7．4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$__________.

8．4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}=$__________.

9．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & f \end{vmatrix}=$__________.

10．　设多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ x & x & x & 3 \\ 1 & 0 & 2 & x \\ x & 1 & 3 & x \end{vmatrix}$，则多项式的常数项为__________.

11．设 $f(x)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x \\ a_{21} & a_{22} & x & a_{24} \\ a_{31} & x & a_{33} & a_{34} \\ x & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$，则多项式 $f(x)$ 中 x^4 的系数为__________.

12. 若三阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$可以写成$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$的线性运算，

则该线性运算的组合系数依次分别为__________，___________，__________.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=$______________.

14. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}=$______________.

二、单项选择

15. 下列选项中为五级偶排列的是（　　）.

（A）12543　　（B）54321　　（C）32514　　（D）54231

16. 四阶行列式$\det(a_{ij})$中的项$a_{11}a_{33}a_{44}a_{22}$和$a_{24}a_{31}a_{13}a_{42}$的符号分别为（　　）.

（A） 正、正　　（B）正、负　　（C）负、负　　（D）负、正

17. 下列选项中是五阶行列式$\det(a_{ij})$中的一项的是（　　）.

（A） $a_{12}a_{31}a_{23}a_{45}a_{34}$　　（B） $-a_{31}a_{22}a_{43}a_{14}a_{55}$

（C） $-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{51}$　　（D） $a_{12}a_{21}a_{55}a_{43}a_{34}$

18. 设x, y为实数且$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ -y & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}$=0，则（　　）.

（A）$x=0, y=1$　（B）$x=-1, y=1$　（C）$x=1, y=-1$　（D）$x=0, y=0$

19. 设行列式$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$,则行列式$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$（　　）.

（A） $\frac{2}{3}$　　（B） 1

（C） 2　　（D） $\frac{8}{3}$

20. $D_n=\begin{vmatrix} 0 & & & -1 \\ & & -1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ -1 & & & 0 \end{vmatrix}$，当 $n=$（　　　）时，$D_n<0$.

（A）3　　　　（B）4　　　　（C）5　　　　（D）7

21. 行列式 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的充要条件是（　　　）.

（A）$k=-2$　（B）$k=3$　（C）$k\neq -2$且$k\neq 3$　（D）$k=-2$或$k=3$

三、计算

22. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

（1）1　2　3　4；　　　　（2）4　1　3　2；

（3）3　4　2　1；　　　　（4）2　4　1　3；

23. 利用对角线法则计算下列三阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；　　　　（2）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

24. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

25. 用行列式定义计算 $D_5=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

26. 用行列式定义计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 2022 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2023 \end{vmatrix}$.

§1.3　n 阶行列式的性质
§1.4　行列式按行（列）展开
§1.4　克莱姆法则

一、填空

27．已知行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&2&2\\4&1&3\end{vmatrix}$，则$M_{13}-2M_{23}-M_{33}=$______________.

28．行列式$\begin{vmatrix}2019&2020\\2021&2022\end{vmatrix}=$______________.

29．已知五阶行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\3&0&4&1&2\\1&1&1&1&1\\1&1&0&2&3\\5&4&3&2&1\end{vmatrix}$，则$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}+A_{45}=$__________.

30．设$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\\2&2&2&2\end{vmatrix}$，则$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=$____________ .

31．已知行列式 D=$\begin{vmatrix}1&0&4&0\\2&-1&-1&2\\0&-6&0&0\\2&4&-1&2\end{vmatrix}$，则$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$___________.

32．设 4 阶行列式$D_4=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\d&a&c&d\\b&d&c&a\\a&d&c&b\end{vmatrix}$，则$A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=$___________.

33．4 阶行列式$D_4=\begin{vmatrix}1&2&4&8\\1&1&1&1\\1&4&16&64\\1&5&25&125\end{vmatrix}=$_____________.

34．4 阶行列式$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=$________________.

35．4 阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix}=$________.

36．$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}=$________.

37．$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=$________.

38．$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}=$________.

39．$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}=$________.

40．$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$________.

41．$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+a^3 & b+b^3 & c+c^3 \end{vmatrix}=$________.

42．$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=$________.

43．$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & d_2 \end{vmatrix}=$________.

44．行列式$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=$________________．

45．行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=$________________．

二、单项选择

46．设$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 \\ 3x-2 & 3x-2 & 3x-5 \end{vmatrix}$，则方程$f(x)=0$的根的个数为（　）．

(A)　0；　(B)　1；　(C)　2；　(D)　3．

47．若三阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1-a_1 & 2b_2-a_2 & 2b_3-a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=6$，则行列式$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=$（　　）．

(A)　3；　(B)　- 3；　(C)　6；　(D)　- 6．

48．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=m$，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix}=n$，则行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$等于（　　）．

(A)　$m+n$；　(B)　$-(m+n)$；　(C)　$n-m$；　(D)　$m-n$

49．若三阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1-a_1 & 2b_2-a_2 & 2b_3-a_3 \\ c_1-b_1 & c_2-b_2 & c_3-b_3 \end{vmatrix}=6$，则行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=$（　　）．

(A)　3；　(B)　−3；　(C)　6；　(D)　−6．

50．行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{11}-2a_{12} & 4a_{13}-a_{11} \\ -3a_{21} & -9a_{21}+6a_{22} & -12a_{23}+3a_{21} \\ a_{31} & 3a_{31}-2a_{32} & 4a_{33}-a_{31} \end{vmatrix}=$（　）．

(A)　12D；　(B)　16D；　(C)　24D；　(D)　36D．

51．若行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=5$，则$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12}-3a_{11} & a_{11}-a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22}-3a_{21} & a_{21}-a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32}-3a_{31} & a_{31}-a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）.

(A)　5；　　(B)　−5；　　(C)　10；　　(D)　−10.

52．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$=2，则$\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \end{vmatrix}$=（　　）.

(A)　-6；　　(B)　-3；　　(C)　3；　　(D)　6.

53．四阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$的值等于（　　）.

(A)　$a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$；　　(B)　$a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$；

(C)　$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$；　　(D)　$(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$.

54．若三阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$可以写成$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$的线性运算，则该线性运算的组合系数依次分别为（　　）.

(A)　$c_1, -b_1, a_1$；　　(B)　b_1, c_1, a_1；

(C)　$c_1, a_1, -b_1$；　　(D)　$a_1, -b_1, c_1$.

三、计算

55．若多项式$f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$，试计算$x$的一次项和常数项.

求各行列式的值：

56．$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

57. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

58. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

59. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

60. $\begin{vmatrix} a^3 & (a-1)^3 & (a-2)^3 & (a-3)^3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ a & a-1 & a-2 & a-3 \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & (a-3)^2 \end{vmatrix}$.

61. 计算$\boldsymbol{n}$阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

62. 计算$\boldsymbol{n}$阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

63. 计算$\boldsymbol{n}$阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots\cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots\cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots\cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots\cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots\cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

64．计算行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$ ．

65．计算$\boldsymbol{n}$阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$.

66．计算$n+1$阶行列式$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

67．计算行列式$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix}$(其中未写出元素为零).

68．计算 n 阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 2 \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

69．计算行列式$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

70．计算$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}$.

71．计算行列式$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & x \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \end{vmatrix}$.

72．计算$\boldsymbol{n}$阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

73．计算$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$.

74．计算$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix}$.

75．计算 n 阶行列式$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$.

76．计算 n 阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

77．计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$.

78．计算 n 阶行列式$D_n=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{bmatrix}$.

79．计算 n 阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 7 \end{vmatrix}$.

80．计算 n 阶行列式$\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

用克莱姆法则解下列方程组：

81．$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0; \end{cases}$

82. $\begin{cases} 5x_1+6x_2 = 1, \\ x_1+5x_2+6x_3 = 0, \\ x_2+5x_3+6x_4 = 0, \\ x_3+5x_4+6x_5 = 0, \\ x_4+5x_5 = 1. \end{cases}$

83. 问λ,μ取何值时,齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\mu x_2+x_3=0 \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解?

84. 问λ取何值时,齐次线性方程组$\begin{cases} (1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$ 有非零解?

第一章习题答案

1. 17；　2. $\dfrac{n(n-1)}{2}$；　3. $\dfrac{n(n-1)}{2}$；　4. $j=4$, $k=3$；　5. 1；　6. -2；

7. 4^4；　8. $-abcd$；　9. $abcf$；　10. -9；　11. 1；　12. c_1, $-b_1$, a_1；

13. $(a-b)(b-c)(c-a)$；　14. $-2(x^3+y^3)$.

15. B；　16. A；　17. D；　18. D；　19. A；　20. C；　21. D.

22. （1）0；　（2）4；　（3）5；　（4）3.

23.（1）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -4$

（2）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb+bac+cba-bbb-aaa-ccc = 3abc-a^3-b^3-c^3$

24. 四阶行列式的一般项为$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，

其中含有因子$a_{11}a_{23}$的项为$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$和$+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

25. $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

26. $D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 2022 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2023 \end{vmatrix} = -2023!$

27. 0；　28. -2；　29. 0；　30. 0；　31. -18；　32. 0；　33. -72　34. -3；

35. 5/16；　36. $4abcdef$；　37. $(a+b+c)^3$；　38. $(ab+1)(cd+1)+ad$

39. 1；　40. $(a-b)^3$；　41. $abc(c-b)(c-a)(b-a)$；　42. 0；

43. $(a_1c_2-a_2c_1)(b_1d_2-b_2d_1)$　44. $(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$

45. $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$

46. B；　47. B；　48. D；　49. A；　50. C；　51. D；　52. D；　53. C；　54. A.

55. $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 的一次项系数是-7，常数项是 14.

56. $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix}\times(-1)^{4+3}=0$$

57. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

58. $$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}=adfbce\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4abcdef$$

59. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}=(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$=abcd+ab+cd+ad+1$$

60. $$\begin{vmatrix} a^3 & (a-1)^3 & (a-2)^3 & (a-3)^3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ a & a-1 & a-2 & a-3 \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & (a-3)^2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ a & a-1 & a-2 & a-3 \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & (a-3)^2 \\ a^3 & (a-1)^3 & (a-2)^3 & (a-3)^3 \end{vmatrix}$$

$$=-24$$

61. $$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

62. $D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{n-1}$

$=a^n+(-1)^{n+1}b^n$

63.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & n-4 & \\ & & & & & n-3 \end{vmatrix}$$

$=6(n-3)\,!$

64. $$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}1/a_i & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=(a_1-\sum_{i=2}^{n}1/a_i)\prod_{j=2}^{n}a_j$$

65. $$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}=n!$$

66. $$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a_0\\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 1\\ a_n & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}1/a_i\\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0\\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a_0-\sum_{i=1}^{n}1/a_i)\prod_{j=1}^{n}a_j$$

67.

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} a_1\begin{vmatrix} a_2 & & & & b_2 & 0 \\ & \ddots & & ⋰ & & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ c_2 & & & & d_2 & \\ 0 & & & & & d_1 \end{vmatrix}$$

$$-b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & & & & b_2 \\ & & \ddots & & ⋰ & \\ & & & a_n & b_n & \\ & & & c_n & d_n & \\ & & ⋰ & & \ddots & \\ & c_2 & & & & d_2 \\ c_1 & & & & & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按最后一行展开}} a_1d_1\begin{vmatrix} a_2 & & & & b_2 \\ & \ddots & & ⋰ & \\ & & a_n & b_n & \\ & & c_n & d_n & \\ & ⋰ & & \ddots & \\ c_2 & & & & d_2 \end{vmatrix}$$

$$-b_1c_1\begin{vmatrix} a_2 & & & & b_2 \\ & \ddots & & ⋰ & \\ & & a_n & b_n & \\ & & c_n & d_n & \\ & ⋰ & & \ddots & \\ c_2 & & & & d_2 \end{vmatrix}=\left(a_1d_1-b_1c_1\right)D_{2n-2}$$

$$\therefore D_{2n}=\left(a_1d_1-b_1c_1\right)D_{2n-2}=\left(a_1d_1-b_1c_1\right)\left(a_2d_2-b_2c_2\right)D_{2n-4}=\cdots=\prod_{i=1}^{n}\left(a_id_i-b_ic_i\right)$$

68.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 2 \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \times(-1) \\ \times(-1) \\ \vdots \\ \\ \times(-1) \end{array}$$

$$
=\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\
0 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1\\
0 & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\
1 & x & x & x & \cdots & 1
\end{vmatrix} \qquad \text{（按第一列展开）}
$$

$$
=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\
1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\
0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\
\times(-1)\\
\times(-1)\\
\vdots\\
\times(-1)
\end{array}
$$

$$
=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}
x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{n+1}x^{n-2}
$$

69. $$
D_n=\begin{vmatrix}
1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\
1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & 1 & \cdots & 1+a_n
\end{vmatrix}
\xlongequal[c_3-c_4,\cdots]{c_1-c_2,c_2-c_3}
\begin{vmatrix}
a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\
-a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\
0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 & 1\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} & 1\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n & 1+a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\text{展开（由下往上}]{\text{按最后一列}}(1+a_n)(a_1a_2\cdots a_{n-1})-
\begin{vmatrix}
a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
-a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & a_{n-2} & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}
a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
-a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n
\end{vmatrix}
+\cdots+
\begin{vmatrix}
-a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=(1+a_n)(a_1a_2\cdots a_{n-1})+a_1a_2\cdots a_{n-3}a_{n-2}a_n+\cdots+a_2a_3\cdots a_n=(a_1a_2\cdots a_n)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})
$$

70.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} 1/i & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i})\,n!$$

71. $$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & x \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \\ a_1 - x & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - x & x - a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n x \begin{vmatrix} a_1 - x & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - x & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix} = (-1)^n x \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)$$

72. $$D_n = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2 - r_3, \cdots]{r_1 - r_2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 + c_1, \cdots]{c_2 + c_1, c_3 + c_1}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

73. 用数学归纳法证明

当$n=2$时, $D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1 x + a_2$, 命题成立.

假设对于$(n-1)$阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1} = x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1},$$

则D_n按第1列展开：

$$D_n = xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} = xD_{n-1} + a_n = \text{右边}$$

所以，对于n阶行列式命题成立.

74. $$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix} = aD_n + xD_n = (a+x)D_n = (a+x)(a+x)D_{n-1}$$

$$= = \cdots\cdots = (a+x)^{n-1} D_2 = (a+x)^{n-1} \begin{vmatrix} a & -1 \\ ax & a \end{vmatrix} = a(a+x)^n$$

75. $$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第}n\text{行}} a_{n-1} + xD_{n-1} = a_{n-1} + x(a_{n-2} + xD_{n-2})$$

$$= a_{n-1} + a_{n-2}x + x^2 D_{n-2} = \cdots\cdots = a_{n-1} + a_{n-2}x + a_{n-3}x^2 + \cdots + a_1 x^{n-2} + a_0 x^{n-1}$$

76.

$$D_n=\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2&2&1\\2&2&\cdots&2&2&2\\2&2&\cdots&3&2&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\2&n-1&\cdots&2&2&2\\n&2&\cdots&2&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&0&-1\\2&2&\cdots&2&2&2\\0&0&\cdots&1&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&n-3&\cdots&0&0&0\\n-2&0&\cdots&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}2\begin{vmatrix}&&&-1\\&&1&\\&\iddots&&\\n-3&&&\\n-2&&&\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}}2\cdot(n-2)!$$

77. $$\begin{vmatrix}1&a_1&0&\cdots&0&0\\-1&1-a_1&a_2&\cdots&0&0\\0&-1&1-a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1-a_{n-1}&a_n\\0&0&0&\cdots&-1&1-a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a_1&0&\cdots&0&0\\0&1&a_2&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&a_n\\0&0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=1$$

78. $$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}=n!\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\\1&n&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}=n!\,(n-1)!\,(n-2)!\cdots2!\cdot1!$$

79. $$D_n=\begin{vmatrix}7&4&0&0&\cdots&0&0\\3&7&4&0&\cdots&0&0\\0&3&7&4&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&7&4\\0&0&0&0&\cdots&3&7\end{vmatrix}=7D_{n-1}-12D_{n-2}$$

所以 $$D_n-3D_{n-1}=4(D_{n-1}-3D_{n-2})=\cdots\cdots=4^{n-2}(D_2-3D_1)=4^n \qquad (*)$$

$$D_n-4D_{n-1}=3(D_{n-1}-4D_{n-2})=\cdots\cdots=3^{n-2}(D_2-4D_1)=3^n \qquad (**)$$

联立（*）和（**）式，解得 $D_n=4^{n+1}-3^{n+1}$

80. $$D_n\overset{\text{性质4}}{\underset{\text{按第一列}}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}a&ab&&&\\1&a+b&ab&&\\&1&a+b&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&ab\\&&&1&a+b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b&ab&&&\\0&a+b&ab&&\\&1&a+b&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&ab\\&&&1&a+b\end{vmatrix}$$

其中：

$$\begin{vmatrix} a & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\vdots \\ c_n+c_{n-1}\cdot(-b)}]{\substack{c_2+c_1\cdot(-b) \\ c_3+c_2\cdot(-b)}} \begin{vmatrix} a & & & \\ 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & a \end{vmatrix} = a^n$$

$$\therefore D_n = a^n + bD_{n-1} = a^n + b\left(a^{n-1} + bD_{n-2}\right) = \cdots = a^n + ba^{n-1} + b^2a^{n-2} + \cdots + b^n$$

用克莱姆法则解下列方程组：

81. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 142 \end{vmatrix} = -142$

$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 142 \end{vmatrix} = -142$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -284 \end{vmatrix} = -284$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -426 \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 142$

$\therefore \quad x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \dfrac{D_3}{D} = 3, \quad x_4 = \dfrac{D_4}{D} = -1$

82. $\begin{cases} 5x_1+6x_2 = 1, \\ x_1+5x_2+6x_3 = 0, \\ x_2+5x_3+6x_4 = 0, \\ x_3+5x_4+6x_5 = 0, \\ x_4+5x_5 = 1. \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}=665,\qquad D_1=\begin{vmatrix}1&6&0&0&0\\0&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\1&0&0&1&5\end{vmatrix}=1507,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}5&1&0&0&0\\1&0&6&0&0\\0&0&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&1&0&1&5\end{vmatrix}=-1145,\qquad D_3=\begin{vmatrix}5&6&1&0&0\\1&5&0&0&0\\0&1&0&6&0\\0&0&0&5&6\\0&0&1&1&5\end{vmatrix}=703,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&0&0\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}=-395,\qquad D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&1&1\end{vmatrix}=212.$$

$\therefore\quad x_1=\frac{1507}{665};\quad x_2=-\frac{1145}{665};\quad x_3=\frac{703}{665};\quad x_4=\frac{-395}{665};\quad x_4=\frac{212}{665}.$

83. 问λ,μ取何值时,齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\mu x_2+x_3=0\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解?

解 $D_3=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}=\mu-\mu\lambda$,

齐次线性方程组有非零解，则$D_3=0$.

即 $\qquad \mu-\mu\lambda=0$

得 $\qquad \mu=0$或$\lambda=1$

不难验证，当$\mu=0$或$\lambda=1$时,该齐次线性方程组确有非零解.

84. 问λ取何值时,齐次线性方程组 $\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$ 有非零解?

解 $D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\2 & 3-\lambda & 1\\1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\2 & 1-\lambda & 1\\1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)^3+(\lambda-3)-4(1-\lambda)-2(1-\lambda)(-3-\lambda)$

$=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3$

齐次线性方程组有非零解，则$D=0$

得 $\lambda=0,\lambda=2$或$\lambda=3$

不难验证，当$\lambda=0,\lambda=2$或$\lambda=3$时，该齐次线性方程组确有非零解.