
线性代数习题册

2022 年版

数据科学与人工智能学院编

第三章 线性方程组

§ 3.1 线性方程组的消元解法

§ 3.2 向量与向量组的线性组合

§ 3.3 向量组的线性相关性

§ 3.4 向量组的秩

§ 3.5 线性方程组解的结构

第三章习题答案

§ 3.1 线性方程组的消元解法

§ 3.2 向量与向量组的线性组合

§ 3.3 向量组的线性相关性

§ 3.4 向量组的秩

一、填空

1. 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性无关, 则向量 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 写成它们的线性组合时, 组合系数是_____.

2. 设三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 且满足 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 则 $a =$ _____.

3. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性无关, 则 k 满足关系式_____.

4. 当 $k =$ _____时, 向量组 $\alpha_1 = (2, 1, -3)^T, \alpha_2 = (k, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, -2)^T$ 线性相关.

5. 若向量组 $\alpha_1^T = (1, t+1, 0), \alpha_2^T = (1, 2, 0), \alpha_3^T = (0, 0, t^2+1)$ 线性相关, 则 $t =$ _____.

6. 当 $k =$ _____时, $\beta = (1, k, 5)$ 能由 $\alpha_1 = (1, -3, 2), \alpha_2 = (2, -1, 1)$ 线性表示.

7. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_2 + 4\alpha_3$ 是线性_____.

8. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -8 \\ k \end{pmatrix}$ 线性相关, 则 $k =$ _____.

9. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ 线性无关, 则 a, b, c 必满足关系式_____.

10. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量组 $k\alpha_2 - \alpha_1, m\alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 线性无关与线性相关常数 m, k 满足的条件分别为_____和_____.

11. 向量组 $\alpha_1^T = (1, 2, 3, 4), \alpha_2^T = (2, 3, 4, 5), \alpha_3^T = (3, 4, 5, 6), \alpha_4^T = (4, 5, 6, 7)$ 的秩是_____.

12. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+\lambda \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 则 $\lambda =$ _____.

13. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2, 则 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$ 的秩为_____.

14. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 而向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的最大线性无关组是_____.

二、单项选择

15. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是一组 n 维向量, 则下列正确的是().

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 不线性相关, 就一定线性无关;

(B) 如果存在 s 个全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关;

(C) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 α_1 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示;

(D) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充要条件是 α_1 不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

16. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关的充要条件是().

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中有一个零向量;

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中任意两个向量成比例;

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中有一个向量是其余向量的线性组合;

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中任意一个向量都是其余向量的线性组合.

17. n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($3 \leq s \leq n$) 线性无关的充要条件是().

(A) 存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $\sum_{i=1}^s k_i \alpha_i \neq 0$;

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关;

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 存在一个向量不能由其余向量线性表示;

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任一个向量不能由其余向量线性表示.

18. 设向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$; 向量组(II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m$, 则必有().

(A) (I)线性相关 $\Rightarrow$ (II)线性相关; (B) (I)线性相关 $\Rightarrow$ (II)线性无关;

(C) (II)线性相关 $\Rightarrow$ (I)线性相关; (D) (II)线性相关 $\Rightarrow$ (I)线性无关.

19. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组() .
- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 线性无关;
 (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关;
 (C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关;
 (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.
20. 设 $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ 线性相关, $\beta, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则() .
- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关; (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;
 (C) α_1 能由 $\beta, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示; (D) β 能由 α_1, α_2 线性表示.
21. 设向量 β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示但不能由向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 记向量组 (II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$, 则() .
- (A) α_m 不能由 (I) 线性表示, 也不能由 (II) 线性表示;
 (B) α_m 不能由 (I) 线性表示, 但能由 (II) 线性表示;
 (C) α_m 能由 (I) 线性表示, 也能由 (II) 线性表示;
 (D) α_m 能由 (I) 线性表示, 但不能由 (II) 线性表示.
22. 设矩阵 A 为 n 阶方阵, 且 $|A| = 0$, 则矩阵 A 中() .
- (A) 必有一列元素全为 0;
 (B) 必有 2 列元素对应成比例;
 (C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合;
 (D) 任意一列向量都是其余列向量的线性组合.
23. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对于任意的常数 k , 必有() .
- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关; (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关;
 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关; (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关.
24. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 均为 n 维向量, 那么, 下列结论正确的是 () .
- (A) 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关;
 (B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关;
 (C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则对任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$;

(D) 若 $0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \cdots + 0 \cdot \alpha_m = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

25. 设两个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 均线性相关, 则 ().

(A) 有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 使

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_s \alpha_s = 0 \text{ 和 } \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \cdots + \lambda_s \beta_s = 0;$$

(B) 有不全为 0 的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 使 $\lambda_1(\alpha_1 + \beta_1) + \lambda_2(\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + \lambda_s(\alpha_s + \beta_s) = 0$;

(C) 有不全为 0 的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 使 $\lambda_1(\alpha_1 - \beta_1) + \lambda_2(\alpha_2 - \beta_2) + \cdots + \lambda_s(\alpha_s - \beta_s) = 0$;

(D) 有不全为 0 的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 和不全为 0 的 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$, 使

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_s \alpha_s = 0 \text{ 和 } \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \cdots + \lambda_s \beta_s = 0.$$

26. 设矩阵 A 为 n 阶方阵, 且 $R(A) = r < n$, 则在 A 的 n 个行向量中 ().

(A) 任意 r 个行向量线性无关;

(B) 必有 r 个行向量线性无关;

(C) 任意 r 个行向量构成极大无关组;

(D) 任意一个行向量都可以由其中任意 r 个行向量线性表示.

27. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出, 则必有 ().

(A) $s \leq t$; (B) $s > t$; (C) 秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leq$ 秩 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$;

(D) 秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) >$ 秩 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$.

28. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是由三个向量构成的线性无关的向量组, 则下列向量组不能与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的向量组是 ().

(A) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3$; (B) $\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$;

(C) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$; (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$.

29. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 α_1, α_2 等价, 则 ().

(A) α_1 与 α_2 线性相关; (B) α_1 与 α_2 线性无关;

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关; (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

30. 矩阵 A () 时可能改变其秩.

(A) 转置; (B) 初等变换; (C) 乘以奇异矩阵; (D) 乘以非奇异矩阵.

31. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & a & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 则 $a =$ ().

(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5.

32. 设 $A \xrightarrow{\text{行初等变换}} B$, 则下面说法不对的是() .

- (A) A 的行组与 B 的行组等价; (B) A 与 B 等价;
(C) A 的列组与 B 的列组等价; (D) A 的列组与 B 的列组有相同的线性关系.

33. 设矩阵 A 的秩为 r , 则 A 中 () .

- (A) 所有 $r-1$ 阶子式都不为 0; (B) 所有 $r-1$ 阶子式全为 0
(C) 至少有一个 r 阶子式不等于 0; (D) 所有 r 阶子式都不为 0.

34. 已知 3×4 矩阵 A 的行向量组线性无关, 则秩 (A^T) 等于 () .

- (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

三、计算

35. 设 $v_1 = (1, 1, 0)^T, v_2 = (0, 1, 1)^T, v_3 = (3, 4, 0)^T$, 求 $v_1 - v_2$ 及 $3v_1 + 2v_2 - v_3$.

36. 设 $3(\alpha_1 - \alpha) + 2(\alpha_2 + \alpha) = 5(\alpha_3 + \alpha)$, 其中 $\alpha_1 = (2, 5, 1, 3)^T, \alpha_2 = (10, 1, 5, 10)^T$,

$\alpha_3 = (4, 1, -1, 1)^T$, 求 α .

37. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 试问常数 m, k 满足什么条件时, 向量组

$$\beta_1 = k\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 = m\alpha_3 - \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 - \alpha_3$$

线性无关? 线性相关?

38. 设向量组 $\alpha_1^T = (1, 1, 1, -1), \alpha_2^T = (1, 3, -1, 1), \alpha_3^T = (1, -1, k, 1), \alpha_4^T = (1, 1, 1, 3)$, 对参数 k 的所有值求出向量组的秩及一个最大无关组.

39. 对下列向量组: ①求秩; ②求一个极大无关组; ③把其余向量用极大无关组线性表示.

(1) $\alpha_1 = (1, 3, 2, 0)^T, \alpha_2 = (7, 0, 14, 3)^T, \alpha_3 = (2, -1, 0, 1)^T, \alpha_4 = (5, 1, 6, 2)^T, \alpha_5 = (2, -1, 4, 1)^T$,

(2) $\alpha_1 = (1, -2, 5)^T, \alpha_2 = (3, 2, -1)^T, \alpha_3 = (3, 10, -17)^T$

(3) $\alpha_1^T = (1, -1, 2, 4), \alpha_2^T = (0, 3, 1, 2), \alpha_3^T = (3, 0, 7, 14), \alpha_4^T = (2, 1, 5, 6)$

(4) $\alpha_1 = (2, 1, 4, 3)^T, \alpha_2 = (-1, 1, -6, 6)^T, \alpha_3 = (-1, -2, 2, -9)^T, \alpha_4 = (1, 1, -2, 7)^T$,

$\alpha_5 = (2, 4, 4, 9)^T$

(5) $\alpha_1 = (1, 0, 0, 1); \alpha_2 = (0, 1, 0, -1); \alpha_3 = (0, 0, 1, -1); \alpha_4 = (2, -1, 3, 0)$ 。

(6) $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (1, -1, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 3, 5)^T, \alpha_4 = (4, -2, 5, 6)^T$,

$$\alpha_5 = (-3, -1, -5, -7)^T.$$

40. 对下列矩阵, ①求秩; ②求列向量组的一个极大无关组; ③把其余列向量用极大无关组线性表示.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

41. 求下列向量组的秩及一个最大无关组, 并把其余向量用所求的最大无关组线性表示.

$$(1) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

四、证明题

42. 设 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$, 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关.

43. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明 $\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 3\alpha_3$ 也线性无关.

44. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1 = 4\alpha_1 - 4\alpha_2, \beta_2 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3$,

证明: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

45. 已知 $\beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$, 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

46. 设 A 为 n 阶矩阵, α 为 n 为列向量, 若存在正整数 k , 使得: $A^k \alpha = 0$, 但是 $A^{k-1} \alpha \neq 0$,

证明向量组 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

47. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是一组 n 维向量, 已知 n 维单位坐标向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 能由它们线性表

示, 证明 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性无关.

48. 已知向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$, 如果各向量组的秩分别为 $R(I) = R(II) = 3, R(III) = 4$. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4.

49. 证明 $r(A) = r(A^T A) = r(AA^T)$.

50. 设 A 是 $m \times s$ 矩阵, B 是 $s \times n$ 矩阵, 证明: $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

51. 设 A 是 $n \times m$ 矩阵, B 是 $m \times n$ 矩阵, $n < m$. 若 $AB = E$, 证明 B 的列向量线性无关.

52. 设向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_s$ 的秩为 r_1 , 向量组 $B: b_1, b_2, \dots, b_t$ 的秩 r_2 , 向量组 $C: a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_t$ 的秩 r_3 , 证明 $\max\{r_1, r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2$.

53. 证明 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

§ 3.5 线性方程组解的结构

一、填空

54. 齐次线性方程组 $A_{m \times n} X_{n \times 1} = 0$ 有非零解的充分必要条件是_____.

55. 设 $AX = 0$ 为 n 元齐次方程组, $R(A) = r < n$, 则方程组有_____个解向量线性无关.

56. 若方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ (\lambda - 3)x_2 + 2x_3 = 2 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2)x_3 = (\lambda - 3)(\lambda - 4) \end{cases}$$
 有唯一解, 则 λ _____.

57. 设
$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$
 则它的一个基础解系是_____.

58. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, 线性方程组 $AX = b$ 有解但不唯一, 则 $a =$ _____.

59. 若线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1, \\ x_2 + x_3 = a_2, \\ x_3 + x_4 = -a_3, \\ x_4 + x_1 = a_4 \end{cases}$$
 有解, 则常数 a_1, a_2, a_3, a_4 应满足条件_____.

60. 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是方程 $AX = b$ 的解, 若 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s$ 也是 $AX = b$ 的解, 则

$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = \underline{\hspace{2cm}}.$

61. 设 $Ax = \beta$ 为三元线性方程组, $R(A) = 2$, η_1, η_2 是它的两个解向量, 满足 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, 则 $Ax = \beta$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

62. 已知四元非线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 3, η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量, 且 $\eta_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (2, 3, 4, 5)^T$, 则对应齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系是 $\underline{\hspace{2cm}}$, $Ax = b$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

63. 设四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵秩为 2, 已知 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 为它的四个解向量, 且 $\eta_1 = (1, 1, 0, 1)^T$, $\eta_1 + \eta_2 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\eta_4 = (1, 0, 1, 1)^T$, 则其通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

64. 设四元方程组 $AX = B$ 的 3 个解是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. 其中 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 + \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, 如

$R(A) = 3$, 则方程组 $AX = B$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

65. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}.$

66. 设 A 为 n 阶方阵 ($n \geq 2$), $|A| = 0$, $A^* \neq 0$, 则 $Ax = 0$ 的基础解系向量个数是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

67. 设 6 阶方阵 A 的秩为 5, α, β 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不相等的解, 则 $Ax = b$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

68. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩等于 3, 且 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

69. 设奇异矩阵 A^* 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵, 其中 A, A^* 的第 1 列向量均可由非零 n 维向量 α 线性表示, 则线性方程组 $Ax = \alpha$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

70. 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零, 且 A 的秩为 $n-1$, $Ax = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、单项选择

71. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是().
(A) $r(A) = n$; (B) $r(A) < n$; (C) $r(A) = m$; (D) $r(A) < m$.
72. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 方程组 $Ax = b$ 的导出组为 $Ax = 0$, 则下列结论中正确的是().
(A) 若 $Ax = 0$ 仅有零解, 则 $Ax = b$ 有唯一解;
(B) 若 $Ax = 0$ 有非零解, 则 $Ax = b$ 有无穷多解;
(C) 若 $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $Ax = 0$ 有非零解;
(D) 若 $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $Ax = 0$ 仅有零解.
73. 设非齐次方程组 $AX = b$ 的导出组 $AX = 0$, 若 $AX = 0$ 仅有零解, 则 $AX = b$ ().
(A) 必有无穷多解; (B) 必有唯一解; (C) 必定无解; (D) 可能无解.
74. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $AX = 0$ 的基础解系, 则该方程组的基础解系还可以是 ().
(A) $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$; (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3$;
(C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_2$; (D) $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_2$.
75. 设三阶方阵 $P \neq O$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, 且 $PQ = O$, 则 ().
(A) $t = 6$ 时, 必有 $r(P) = 1$; (B) $t = 6$ 时, 必有 $r(P) = 2$;
(C) $t \neq 6$ 时, 必有 $r(P) = 1$; (D) $t \neq 6$ 时, 必有 $r(P) = 2$.
76. 设 n 阶方阵 A 不可逆, 则必有 ().
(A) 秩(A) $< n$; (B) 秩(A) $= n - 1$; (C) $A = 0$; (D) 方程组 $Ax = 0$ 只有零解.
77. 设 A 为 5 阶方阵, 且 $R(A) = 4$, β_1, β_2 是 $Ax = 0$ 的两个不同的解向量, 则 $Ax = 0$ 的通解为 ().
(A) $k\beta_1$; (B) $k\beta_2$; (C) $k(\beta_1 + \beta_2)$; (D) $k(\beta_1 - \beta_2)$.
78. 设 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $Ax = b$ 的通解是 ().
(A) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$; (B) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$;
(C) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$; (D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

79. 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是对应齐次线性方程组

$Ax = 0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则方程组 $Ax = b$ 的通解是 ().

- (A) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$; (B) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$;
(C) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$; (D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

80. 设 A, B 为满足 $AB = 0$ 的两个非零矩阵, 则必有 ().

- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关;
(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关;
(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关;
(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

81. 设 α_1, α_2 为非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的两个不同解, 则 () 是 $Ax = \beta$ 的解.

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2$; (B) $\frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$; (C) $\alpha_1 - \alpha_2$; (D) $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, k_i \in R, i = 1, 2$.

82. 设 $Ax = b$ 是非齐次线性方程组, η_1, η_2 是其任意两个解, 则下列结论错误的是 ().

- (A) $\eta_1 + \eta_2$ 是 $Ax = 0$ 的一个解; (B) $\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2$ 是 $Ax = b$ 的一个解;
(C) $\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = 0$ 的一个解; (D) $2\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的一个解.

83. 设齐次线性方程组 $Ax = 0$, 其中 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = n - 3$. ξ_1, ξ_2, ξ_3 是方程组的三个线性无关的解向量, 则 $Ax = 0$ 的基础解系为 ().

- (A) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$; (B) $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$;
(C) $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$; (D) $\xi_3 - \xi_2 - \xi_1, \xi_3 + \xi_2 + \xi_1, -2\xi_3$.

84. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解, 则关于系数矩阵 A 下列一定成立的是 ().

- (A) 行向量组线性相关; (B) 行向量组线性无关;
(C) 列向量组线性相关; (D) 列向量组线性无关.

85. 设齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵为 3×3 不可逆矩阵, 且矩阵 A 存在非零元素,

ξ_1, ξ_2 是该方程组的两个线性无关的解向量, 则 $Ax = 0$ 的基础解系为 ().

- (A) $\xi_1 + \xi_2$; (B) $\xi_1 - \xi_2$;
(C) $\xi_1 + \xi_2, \xi_1 - \xi_2$; (D) $k_1\xi_1, k_2\xi_2 (k_1, k_2 \in R)$.

86. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元非齐次方程组 $Ax = b$ 的三个不同的解向量, 且 A 中有三个行向量不共面, k_1, k_2 为任意常数, 则方程组 $Ax = b$ 的通解是 ().

- (A) $k_1(\alpha_1 - \alpha_3) + \alpha_2$; (B) $k_1(\alpha_1 - \alpha_3) + k_2\alpha_2 + \alpha_1$;
(C) $k_1(\alpha_1 - \alpha_3) + k_2(\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_1$; (D) $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \alpha_3$.

87. 设 $r(A_{m \times n}) = m < n$, 则不一定成立的是 ().

- (A) $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E_m, O)$; (B) $A \xrightarrow{\text{初等列变换}} (E_m, O)$;
(C) 对 $\forall b \in R^n$, $Ax = b$ 必有无穷多解; (D) $|A^T A| = 0$.

三、计算

88. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

$$(1) \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0.$$

$$(4) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

89. 求解下列非齐次线性方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -2, \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$$

90. 求非齐次线性方程组的通解。

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 12 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -5 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = -7 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 5 \end{cases}$$

91. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, 求一个 4×2 矩阵 B , 使 $AB = 0$, 且 $R(B) = 2$.

92. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$,

试问当 a, b 满足什么条件时, (1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示式唯一;

(2) β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示; (3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 写出一般表达式.

93. 问 λ 取何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解.

94. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+2 & a+1 \\ -1 & a-2 & 2a-3 \end{pmatrix}$, 若存在 3 阶非零矩阵 B , 使得 $AB=0$,

(1) 求 a 的值; (2) 求方程 $Ax=0$ 的通解.

95. a, b 取何值时, 方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + ax_2 + 3x_3 = b \end{cases}$ 有唯一解, 无解, 有无穷多个解; 并在

有无穷多个解时求其通解.

96. 当 λ 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda \end{cases}$ 有无穷多解? 并用基础解系表示方

程组的全部解.

97. 当 k 取何值时, 方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = k \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$
 有无穷多解, 并求出此时的一般解.

98. λ 取何值时, 方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 有唯一解, 无解, 有无穷多个解; 并在有无穷

多个解时求其通解.

99. k 满足什么条件时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -k \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = k^2 \\ 2x_1 + x_2 + k^2x_3 = 0 \end{cases}$$
 有唯一解, 无解, 有无穷多解?

100. 当 t 取何值时, 非齐次线性方程组
$$\begin{cases} tx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + tx_2 + x_3 = t \\ x_1 + x_2 + tx_3 = t^2 \end{cases}$$
 无解, 有唯一解或无穷

多解, 并在有无穷多解时, 求其通解.

101. 问 a, b 为何值时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = 2b \end{cases}$$
 有解, 无解, 有解时求通解.

102. 对于线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2. \end{cases}$$
 讨论 λ 取何值时, 方程组无解, 有唯一解和无穷

多组解. 在方程组有无穷多组解时求全部解.

103. a, b 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$
 有唯一解, 无解, 有无穷多组解?

有无穷多组解时求出通解.

104. 设线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\mu)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$
 已知 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程

组的一个解, 试求

(I) 方程组的全部解, 并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;

(II) 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

105. 设非齐次线性方程 $A_{m \times 4}x = b$, $r(A) = 2$, η_1, η_2, η_3 是它的三个解, 且

$$\eta_1 + \eta_2 = (3, 4, 6, 7)^T, \eta_2 + \eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T, \eta_3 + \eta_1 = (2, 3, 4, 5)^T$$

求该方程组的通解.

106. 四元非齐次线性方程 $Ax = b$ 的系数矩阵前两列不对应成比例, η_1, η_2, η_3 是它的三个解, 且 $\eta_1 + \eta_2 = (3, 4, 6, 7)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\eta_3 + \eta_1 = (2, 3, 4, 5)^T$, 求其通解.

107. 设线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$
 与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a 的值

及公共解.

108. 已知齐次线性方程组 (i)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \end{cases}$$
 和 (ii)
$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0, \end{cases}$$

同解, 求 a, b, c 的值.

109. 求一齐次线性方程组, 使其基础解系为 $\xi_1 = (0, 1, 2, 3)^T$, $\xi_2 = (3, 2, 1, 0)^T$.

四、证明题

110. 设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个特解, ξ_1, ξ_2 是其导出组 $Ax = 0$ 的一个基础解系. 试证明

(1) $\eta_1 = \eta_0 + \xi_1$, $\eta_2 = \eta_0 + \xi_2$ 均是 $Ax = b$ 的解; (2) η_0, η_1, η_2 线性无关.

111. 若对任意的 $n \times 1$ 矩阵 X , 均有 $AX = O$, 证明 A 必是零矩阵.

112. 若 ξ_1 和 ξ_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$, 试证明 η_1, η_2 也是 $Ax = 0$ 的基础解系.

113. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系. 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

114. 已知 n 元齐次线性方程组 $A_1x = 0$ 的解全是 $A_2x = 0$ 的解, 证明 A_2 的行向量可以由 A_1 的行向量线性表出.

115. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 且 $AB = 0$, 证明 $R(A) + R(B) \leq n$.

116. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, E 为 n 阶单位矩阵, 证明 $R(A) + R(A - E) = n$.

117. 设 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解, $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的

一个基础解系, 证明: (1) $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关; (2) $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

118. 设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵的秩为 r , $\eta_1, \dots, \eta_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解. 试证它的任一解可表示为

$$x = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_{n-r+1} \eta_{n-r+1} \quad (\text{其中 } k_1 + \dots + k_{n-r+1} = 1).$$

第三章习题答案

§ 3.1 线性方程组的消元解法

§ 3.2 向量与向量组的线性组合

§ 3.3 向量组的线性相关性

§ 3.4 向量组的秩

一、填空

1. 1, 1, -1; 2. -1; 3. $k \neq 1, k \neq -2$; 4. -2; 5. 1; 6. $k = -8$; 7. 无关;
8. 2; 9. $abc \neq 0$; 10. $mk \neq 1, mk = 1$; 11. 2; 12. -3; 13. 2; 14. α_2, α_3 .

二、单项选择

15. A; 16. C; 17. D; 18. A; 19. C; 20. C; 21. B; 22. C; 23. A; 24. B;
25. D; 26. B; 27. C; 28. B; 29. C; 30. C; 31. D; 32. C; 33. C; 34. C.

三、计算

35. 解 $v_1 - v_2 = (1, 1, 0)^T - (0, 1, 1)^T = (1, 0, -1)^T$

$$\begin{aligned} 3v_1 + 2v_2 - v_3 &= 3(1, 1, 0)^T + 2(0, 1, 1)^T - (3, 4, 0)^T \\ &= (3 \times 1 + 2 \times 0 - 3, 3 \times 1 + 2 \times 1 - 4, 3 \times 0 + 2 \times 1 - 0)^T = (0, 1, 2)^T \end{aligned}$$

36. 解 由 $3(a_1 - a) + 2(a_2 + a) = 5(a_3 + a)$ 整理得

$$a = \frac{1}{6}(3a_1 + 2a_2 - 5a_3) = (1, 2, 3, 4)^T$$

37. 解 当 $mk \neq 1$ 时, 无关; 当 $mk = 1$ 时, 相关

$$38. \text{ 解: } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \stackrel{\Delta}{=} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4+r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & k-1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3+r_2 \\ r_4-r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2/2 \\ r_3 \leftrightarrow r_4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & k-3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3/4 \\ r_4-(k-3)(r_3/4)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(k-3) \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} B$$

1) 当 $k \neq 3$ 时, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = R(B) = 4$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是最大无关组;

$$2) \text{ 当 } k = 3 \text{ 时 } R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = R(B) = 3, \text{ 这时 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一个最大无关组

39. 解

$$(1) \text{ 设 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是, (1) $r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3 < 5$; (2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性相关;

(3) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一个极大无关组; (4) $\alpha_4 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_5 = -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$.

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 10 \\ 5 & -1 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & -16 & -32 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

因为 $R(A) = 2$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2. 且 α_1, α_2 为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关

组, 由 B 的第三列可得 $\alpha_3 = -3\alpha_1 + 2\alpha_2$.

$$(3) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以, $R(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T) = 3$, $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_4^T$ 为一个最大无关组, 且 $\alpha_3^T = 3\alpha_1^T + \alpha_2^T$

$$(4) \quad A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5) 略

$$(6) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大线性无关组为 α_1, α_2 , 故秩 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} = 2$ (8 分)

且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2$, $\alpha_5 = -2\alpha_1 - \alpha_2$

40. 解 (1) 对矩阵 A 施行初等行变换

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

秩 $(B) = 3$, 所以秩 $(A) = \text{秩}(B) = 3$.

由于 A 与 B 的列向量组有相同的线性关系, 而 B 是阶梯形, B 的第 1、2、4 列是 B 的列向量组的一个最大线性无关组, 故 A 的第 1、2、4 列是 A 的列向量组的一个最大线性无关组。

(A 的第 1、2、5 列或 1、3、4 列, 或 1、3、5 列也是)

$$(2) \text{ 设 } A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), \text{ 则 } A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \text{ 最大无关组为 } a_1, a_2, a_4$$

$$41. \text{ 解 (1) } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 11 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3 < 4$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一组基。

(2)

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $r(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$, a_1, a_2, a_3 是极大无关组, 且 $a_4 = -2a_1 + 2a_2 + a_3$

四、证明题

42. 证明 设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_r\beta_r = 0$ 则

$$(k_1 + \cdots + k_r)\alpha_1 + (k_2 + \cdots + k_r)\alpha_2 + \cdots + (k_p + \cdots + k_r)\alpha_p + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

因向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 故

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_r = 0 \\ k_2 + \cdots + k_r = 0 \\ \dots\dots\dots \\ k_r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因为系数行列式不为零, 故方程组只有零解

则 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$ 所以 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关

43. 证明 设存在数 k_1, k_2, k_3 使 $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + 2\alpha_2) + k_3(\alpha_2 + 3\alpha_3) = 0$

$$\text{整理, 得: } (k_1 + k_2)\alpha_1 + (2k_2 + k_3)\alpha_2 + 3k_3\alpha_3 = 0$$

$$\text{又 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关, 所以 } \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_2 + k_3 = 0 \\ 3k_3 = 0 \end{cases}, \text{ 所以, } k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

故 $\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 3\alpha_3$ 线性无关。

44. 证明:

$$\text{法一: 因 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (4\alpha_1 - 4\alpha_2, \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_3) \xrightarrow{C1/4} (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3) \xrightarrow{C1-C2} (0, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3) \xrightarrow{\Delta} (0, \delta_1, \delta_2)$$

故 $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = R(0, \delta_1, \delta_2) \leq 2 < 3$, 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关

法二: (基本方法) 设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$, 只要证明有不全为零的数 x_1, x_2, x_3 使上式成立即可。

$$\text{整理得到: } (4x_1 + x_2)\alpha_1 + (-4x_1 - 2x_2 + x_3)\alpha_2 + (x_2 - x_3)\alpha_3 = 0$$

$$\text{由已知条件, 向量组 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关, 推出 } \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{此齐次线性方程组的系数矩阵为 } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

易知 $R(A) < 3$, 所以有非零解。即有不全为零的数 x_1, x_2, x_3 使首式成立。

所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关

45. 证明略

46. 证明 当 $k=1$ 时, $A^1\alpha = 0$, $A^0\alpha = \alpha \neq 0$, 则 α 线性无关, 结论正确;

$$\text{当 } k > 1 \text{ 时, 设 } \lambda_0\alpha + \lambda_1A\alpha + \lambda_2A^2\alpha + \cdots + \lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0 \quad (1)$$

$$(1) \text{ 式两端左乘 } A^{k-1}, \text{ 则 } \lambda_0A^{k-1}\alpha + \lambda_1A^k\alpha + \lambda_2A^{k+1}\alpha + \cdots + \lambda_{k-1}A^{2k-2}\alpha = 0$$

$$\because A^k\alpha = 0 \therefore \lambda_0A^{k-1}\alpha = 0, \text{ 又 } A^{k-1}\alpha \neq 0, \therefore \lambda_0 = 0, \text{ 代入 (1) 得:}$$

$$\lambda_1A\alpha + \lambda_2A^2\alpha + \cdots + \lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0 \quad (2)$$

$$(2) \text{ 式两端左乘 } A^{k-2}, \text{ 则 } \lambda_1A^{k-1}\alpha + \lambda_2A^k\alpha + \cdots + \lambda_{k-1}A^{2k-3}\alpha = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \text{ 代入 (2) 得}$$

$$\lambda_2A^2\alpha + \lambda_3A^3\alpha + \cdots + \lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0 \quad (3)$$

$$(3) \text{ 式两端左乘 } A^{k-3}, \text{ 则 } \lambda_2A^{k-1}\alpha + \lambda_3A^k\alpha + \cdots + \lambda_{k-1}A^{2k-4}\alpha = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

以此类推, 得到 $\lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$, 从而 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

[illegible]
$$\begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} \quad \text{由} \quad \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} \neq 0$$

48. 证 要证向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4, 等价于证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关.

$$\text{令 } x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0,$$

又 $R(\text{III})=4$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关. 故
$$\begin{cases} x_1 - x_4 k_1 = 0 \\ x_2 - x_4 k_2 = 0 \\ x_3 - x_4 k_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

(注：此题证明方式很多种)

设 α 是 $Ax=0$ 的解, 则 $A^T A\alpha = A^T (A\alpha) = 0$, 即 $Ax=0$ 的解也是 $A^T Ax=0$ 的解;

所以 $0 = \alpha^T A^T A \alpha = (A\alpha)^T A\alpha$, 则 $A\alpha = 0$, 即 $A^T Ax = 0$ 的解也是 $Ax = 0$ 的解;

即 $Ax = 0$ 与 $A^T Ax = 0$ 同解, 因而 $r(A^T A) = r(A)$.

同理可证 $Ax=0$ 与 $AA^Tx=0$ 也是同解的, 因而 $r(AA^T)=r(A)$,

故对任何矩阵 A , 都有 $r(A^T A) = r(AA^T)$.

50. 证明 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}$, B 行分块为 $B = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_s \end{pmatrix}$, AB 行分块为

$$AB = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_m \end{pmatrix}, \therefore \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_m \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\bar{\beta}_1 + \cdots + a_{1s}\bar{\beta}_s \\ a_{21}\bar{\beta}_1 + \cdots + a_{2s}\bar{\beta}_s \\ \vdots \\ a_{m1}\bar{\beta}_1 + \cdots + a_{ms}\bar{\beta}_s \end{pmatrix}$$

$\therefore AB$ 可由 $\bar{\beta}_1, \cdots, \bar{\beta}_s$ 线性表示, $\therefore R(AB) \leq R(B)$, 同理可证 $R(AB) \leq R(A)$,

即 $R(AB) \leq \min(R(A), R(B))$, 证毕.

51.

解 方法一 用定义证明.

设 $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 其中 $b_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 是 B 的第 i 个列向量, 若

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + \cdots + k_n b_n = 0,$$

即

$$(b_1, b_2, \cdots, b_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0,$$

上式两边乘以 A , 得

$$AB \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0,$$

即 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, 所以 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 线性无关, 即 B 的列向量组线性无关.

方法二 利用矩阵的秩证明.

因为 $r(B) \leq \min\{m, n\} \leq n$, 又因为

$$r(B) \geq r(AB) = r(E) = n.$$

故 $r(B) = n$, 所以 B 的列向量组线性无关.

方法三 转化齐次线性方程组进行判定.

设 x 为 $Bx = 0$ 的任一解向量, 则由

$$ABx = A \cdot 0 = 0,$$

知 $Ex = x = 0$, 即必有 $x = 0$, 说明 $Bx = 0$ 只有零解, 所以 $r(B) = n$, 即 B 的列向量组线性无关.

52. 证明 设 A, B, C 的最大线性无关组分别为 A', B', C' , 含有的向量个数(秩)分别为 r_1, r_2, r_3 , 则 A, B, C 分别与 A', B', C' 等价, 易知 A, B 均可由 C 线性表示, 则秩(C) $\geq$ 秩(A), 秩(C) $\geq$ 秩(B), 即 $\max\{r_1, r_2\} \leq r_3$

设 A' 与 B' 中的向量共同构成向量组 D , 则 A, B 均可由 D 线性表示, 即 C 可由 D 线性表示, 从而 C' 可由 D 线性表示, 所以秩(C') $\geq$ 秩(D), D 为 $r_1 + r_2$ 阶矩阵, 所以秩(D) $\leq r_1 + r_2$ 即 $r_3 \leq r_1 + r_2$.

53. 证明 设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 且 A, B 行向量组的最大无关组分别为 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_r^T$ $\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_s^T$, 显然, 存在矩阵 A', B' , 使得

$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_s^T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix} = B' \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_s^T \end{pmatrix}, \quad \therefore A+B = \begin{pmatrix} a_1^T + b_1^T \\ a_2^T + b_2^T \\ \vdots \\ a_n^T + b_n^T \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_s^T \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_s^T \end{pmatrix}$$

因此 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

§ 3.5 线性方程组解的结构

一、填空

54. $r(A) < n$; 55. $n - r$; 56. $\lambda \neq 1, 2, 3$; 57. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 58. $a = -2$;

59. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$; 60. 1; 61. $x = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 62. $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k\eta + \eta_1$;

63. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R$; 64. $k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 65. -3;

66. 1; 67. $X = k(\beta - \alpha) + \alpha$; 68. $k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; 69. $k\alpha + (\lambda, 0, \dots, 0)^T$ 70.

$x = k(1, 1, \dots, 1)^T, k$ 为任意常数.

二、单项选择

71. B; 72. C 73. D 74. C 75. C 76. A 77. D 78. C 79. B 80. A
81. B 82. A 83. B 84. D 85. C 86. A 87. A

三、计算

88. 解 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$

取 $x_3 = 1, x_4 = -3$ 得 $x_1 = -4, x_2 = 0$; 取 $x_3 = 0, x_4 = 4$ 得 $x_1 = 0, x_2 = 1$

因此基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{19} & -\frac{1}{19} \\ 0 & 1 & \frac{14}{19} & -\frac{7}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{19}x_3 + \frac{1}{19}x_4 \\ x_2 = -\frac{14}{19}x_3 + \frac{7}{19}x_4 \end{cases}$

取 $x_3 = 1, x_4 = 2$ 得 $x_1 = 0, x_2 = 0$; 取 $x_3 = 0, x_4 = 19$ 得 $x_1 = 1, x_2 = 7$

因此基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$

(3) 原方程组即为

$$x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}$$

取 $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = 0$ 得 $x_n = -n$

取 $x_2 = 1, x_1 = x_3 = x_4 = \cdots = x_{n-1} = 0$ 得 $x_n = -(n-1) = -n+1$

.....

取 $x_{n-1} = 1, x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 0$ 得 $x_n = -2$

所以基础解系为 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

通解为 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, k \in R;$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通解为 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in R;$

89. 解 (1) 对系数的增广矩阵施行行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 即得 } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ 通解 } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad k \in R;$$

$$(3) \text{ 通解为 } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in R.$$

$$(4) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$90. \text{ 解 } (1) (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ 于是}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 + 4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + 1 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in R.$$

$$(2) \text{ 解: } \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3/2 x_3 + 1 \\ x_2 = 3/2 x_3 \\ x_3 = -1/2 x_3 + 1 \end{cases} \Rightarrow X = c \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in R)$$

(3) 解 设方程组的增广矩阵为 $\bar{A}$, 对 $\bar{A}$ 实施初等行变换

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则方程组的一般解为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 3 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 2 \end{cases}$ (其中 x_3, x_4, x_5 为自由未知量).

可得到一个特解 $\xi_0 = (-3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

又导出组的一般解为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$.

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得到方程组的一个基础解系

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以方程组的全部解为 $\xi = \xi_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3$ (c_1, c_2, c_3 为任意常数)

$$(4) \text{ 解: } \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -1 + 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = 1 - 6x_3 + 5x_4 \end{cases}$ x_3, x_4 是自由未知量

$$\text{取 } x_3 = x_4 = 0, \text{ 得特解 } \eta^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对应导出组解 $\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$ x_3, x_4 是自由未知量

$$\text{令 } x_3 = 1, x_4 = 0 \text{ 得 } \xi_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ 令 } x_3 = 0, x_4 = 1 \text{ 得 } \xi_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解 $X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta^*$, k_1, k_2 为任意常数。

91. 解 由于 $R(B) = 2$, 所以可设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ 则由

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 可得}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ 解此非齐次线性方程组可得唯一解 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{2}{1} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

故所求矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

92. 解 $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 10 & b \end{array} \right]$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & a & 1 \\ 4 & 5 & 10 & b \end{array} \right] \xrightarrow[r_3 - 4r_1]{r_2 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & a+2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & b \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & a+4 & b+1 \end{array} \right]$$

所以: 当 $a \neq -4$ 时, β 可由 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$ 线性表示, 且表达式唯一;

当 $a = -4, b \neq -1$ 时, β 不可由 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$ 线性表示;

当 $a = -4, b = -1$ 时, β 可由 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$ 线性表示, 且表达式不唯一。

当 $a = -4, b = -1$ 时, 由 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ 得通解为:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2k-1 \\ k \end{pmatrix}, \quad k \in R$$

故: 一般表达式为: $\beta = \alpha_1 + (2k-1)\alpha_2 + k\alpha_3$

93. 解 齐次线性方程组有非零解, 则系数行列式为零:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1-(1-\lambda)r_3]{r_2-2r_3} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 4-(1-\lambda)^2 \\ 0 & 1-\lambda & -1+2\lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(2-\lambda)\lambda, \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=2, \lambda_3=3$$

$$94. \text{ 解 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+2 & a+1 \\ -1 & a-2 & 2a-3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & 2a-2 \end{pmatrix}, \quad a=0 \text{ 时}, r(A)=2 < 3,$$

$Ax=0$ 有非零解, 即存在 3 阶非零矩阵 B , 使得 $AB=0$.

$$\text{此时, } A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Ax=0 \text{ 化简为 } \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0x_2 \end{cases}, \quad \text{基础解系为 } \xi = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$Ax=0$ 的通解为 $x = k\xi$.

95. 解: 该方程的增广矩阵为:

$$B = (A; \beta) \xrightarrow{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & a & 3 & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-6 & -1 & b-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5-a & 4-a+b \end{bmatrix}$$

1) 当 $5-a \neq 0$, 即 $a \neq 5$, b 任意取值时, $R(A) = R(B) = 3$, 方程组有唯一解;

2) 当 $\begin{cases} 5-a=0 \\ 4-a+b \neq 0 \end{cases}$ 时 $R(A) = 2 \neq 3 = R(B)$, 即 $a=5, b \neq 1$ 时,

方程组无解;

3) 当 $\begin{cases} 5-a=0 \\ 4-a+b=0 \end{cases}$ 时 $R(A) = R(B) = 2 < 3$, 即 $a=5, b=1$ 时,

方程组有无穷多解.

当 $a=5, b=1$ 时, 代入得

$$B = (A|\beta) \xrightarrow{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r1-3r2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 - x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$, 通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (其中 c 为任意常数).

96. 解 对增广矩阵实施初等行变换

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda=1$ 时, $R(\bar{A}) = R(A) = 2$, 方程组有无穷多解.

由最后矩阵得原方程组的同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$,

取 $x_3 = 0$, 得一特解 $\xi = (1, 0, 0)^T$.

又导出组的同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$, 得基础解系 $\eta = (1, 1, 1)^T$,

故方程组的通解为 $x = \xi + c\eta = (1, 0, 0)^T + c(1, 1, 1)^T$, 其中 c 为任意常数.

97. 解 方程组增广矩阵为

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 5 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3-2k \\ 0 & 1 & -1 & 3k-3 \\ 0 & 0 & 0 & k-6 \end{pmatrix}$$

方程组有无穷多解, 则 $R(A) = R(A, b) = 2$, 所以 $k=6$

代入方程组得该方程组的通解为: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}, c \in R$

98. 解 该方程组的增广矩阵为:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

1) 当 $\lambda \neq 1, -2$ 时, 方程组有唯一解;

2) 当 $\lambda = -2$ 时, 方程组无解;

3) 当 $\lambda = 1$ 时, 方程组有无穷多解.

$$\text{当 } \lambda = 1 \text{ 时, } B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{所以, } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \in R).$$

$$99. \text{ 解 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -k \\ 1 & 2 & k & k^2 \\ 2 & 1 & k^2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -k \\ 0 & 1 & k-2 & k^2+k \\ 0 & -1 & k^2-4 & 2k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -k \\ 0 & 1 & k-2 & k^2+k \\ 0 & 0 & (k-2)(k+3) & k(k+3) \end{pmatrix}$$

当 $k \neq 2$ 且 $k \neq -3$ 时, 方程组有唯一解. 当 $k = 2$ 时方程组无解.

$$\text{当 } k(k+3) = 0 \text{ 时方程组 } r(A) = r(B), \text{ 当 } k = 0 \text{ 时 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

这时方程组只有零解.

$$\text{当 } k = -3 \text{ 时, } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 这时方程组有无穷多解.}$$

$$100. \text{ 解 } (1) \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 即 } t \neq 1, -2 \text{ 时方程组有唯一解.}$$

$$B = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & t \\ 1 & 1 & t & t^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & t^2 \\ 0 & t-1 & 1-t & t(1-t) \\ 0 & 0 & (1-t)(2+t) & (1-t)(t+1)^2 \end{pmatrix}$$

由 $(1-t)(2+t) = 0, (1-t)(1+t)^2 \neq 0$,

得 $t = -2$ 时, 方程组无解.

$R(A) = R(B) < 3$, 由 $(1-t)(2+t) = (1-t)(1+t)^2 = 0$, 得 $t = 1$ 时, 方程组有无穷多个解.

$$\text{这时, } B = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & t \\ 1 & 1 & t & t^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

原方程化为: $a_4 = -2a_1 + 2a_2 + a_3$

$$\text{通解为: } x = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } c_1, c_2 \text{ 为任意常数.}$$

$$101. \text{ 解 } \bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & a & 7 & 1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & 2b \end{array} \right] \xrightarrow{r} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -b \\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 1-b \end{array} \right]$$

当 $a \neq -8$ 时, b 任意, $r(A) = r(\tilde{A}) = 3 < 4$, 方程组有无穷多解;

当 $a = -8$ 且 $b \neq 1$ 时, $r(A) = 2, r(\tilde{A}) = 3, r(A) \neq r(\tilde{A})$, 方程组无解;

当 $a = -8$ 且 $b = 1$ 时, $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 4$, 方程组有无穷多解.

求通解略.

102. 解: 对增广矩阵作初等行变换得

$$B = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 1 & \vdots & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & \vdots & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \lambda & \vdots & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & \vdots & 3(\lambda-1) \end{array} \right)$$

方程组有惟一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(B) = 3 \Rightarrow \lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$;

当 $\lambda = -2$ 时, $R(A) = 2 \neq R(B) = 3$, 方程组无解.

当 $\lambda = 1$ 时, 有无穷多解.

当 $\lambda = 1$ 时,

$$B \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array} \right) \Rightarrow R(A) = R(B) = 1 < 3, \text{ 方程组有无穷多解,}$$

其通解方程组为 $x_1 = -x_2 - x_3 - 2$.

则方程组的通解 $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数;

103. 解 $B = [A:b] \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$.

当 $R(A) = 4 \Leftrightarrow a \neq 1$ 时, 方程组有惟一解;

当 $a = 1$ 时, 方程组无解或无穷多解, 此时 $B = [A:b] \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$.

①当 $b = -1$ 时, $R(A) = R(B) = 2 < 4$, 方程组有无穷多解, 此时

$$B = [A:b] \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

方程组的通解为 $x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, k_1, k_2 为任意常数;

②当 $b \neq -1$ 时, $R(A) = 2, R(B) = 3$, 方程组无解.

综上所述: (1)当 $a \neq 1$ 时, 方程组有惟一解; (2)当 $a = 1, b = -1$ 时, 方程组有无穷多解;

(3)当 $a = 1, b \neq -1$ 时, 方程组无解.

104. 解 (I) 将已知解 $(1, -1, 1, -1)^T$ 代入原方程组, 解得 $\mu = \lambda$ 代入原方程组的导出组, 有

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\lambda)x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{当 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 时, } A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 方程组化简为 } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 \\ x_4 = -x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

基础解系为 $\xi_1 = (\frac{1}{2}, 1, 0, -1)^T$, $\xi_2 = (\frac{5}{2}, 0, 1, -3)^T$

令 $X_0 = (1, -1, 1, -1)^T$, 则所求通解为 $X = X_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$, 其中 k_1, k_2 为任意实数.

$$\text{当 } \lambda \neq \frac{1}{2} \text{ 时, } A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 方程组化简为 } \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = -2x_3 \end{cases}$$

基础解系为 $\xi = (2, -1, 1, -2)^T$, 则所求通解为 $X = X_0 + k\xi$, 其中 k_1, k_2 为任意实数.

(II) 从上述解中找出满足 $x_2 = x_3$ 的部分.

$$\text{当 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 时, } X = X_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = (1 + \frac{k_1}{2} + \frac{5k_2}{2}, -1 + k_1, 1 + k_2, -1 - k_1 - 3k_2)^T$$

$$\text{令 } -1 + k_1 = 1 + k_2, \text{ 得 } k_1 = k_2 + 2,$$

$$\text{代入通解, 整理得 } X = (2, 1, 1, -3)^T + k(3, 1, 1, -4)^T.$$

$$\text{当 } \lambda \neq \frac{1}{2} \text{ 时, 类似地得到满足 } x_2 = x_3 \text{ 的唯一解 } X = (-1, 0, 0, 1)^T.$$

$$105. \quad x = \frac{1}{2}(2, 3, 5, 6)^T + k_1(1, 1, 1, 1)^T + k_2(1, 1, 2, 2)^T, \text{ 形式不唯一.}$$

106. 解 因为系数矩阵有两列不对应成比例, 则 $r(A) \geq 2$, 又因为

$$(\eta_1 + \eta_2) - (\eta_2 + \eta_3) = (\eta_1 - \eta_3) = (2, 2, 3, 3)^T,$$

$$(\eta_1 + \eta_2) - (\eta_3 + \eta_1) = (\eta_2 - \eta_3) = (1, 1, 2, 2)^T$$

为导出组的两个线性无关的解, 因此 $4 - r(A) \geq 2$, $\therefore r(A) = 2$, 则其全部解是

$$(x = \frac{1}{2}(2, 3, 5, 6)^T + k_1(2, 2, 3, 3)^T + k_2(1, 1, 2, 2)^T, \text{ 形式不唯一})$$

$$107. \text{ 解 联立, 得 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases}, \text{ 此方程组的解即为公共解.}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 2 & a^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

$$(1) a=1 \text{ 时, } r(A)=r(\bar{A})=2<3, \text{ 联立方程组有解, 此时, } \bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对应着齐次方程组, 基础解系为 $(-1, 0, 1)^T$, 故所求公共解为 $k(-1, 0, 1)^T$;

$$(2) a=2 \text{ 时, } r(A)=r(\bar{A})=3, \text{ 联立方程组有唯一解. 此时 } \bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

唯一解 $(0, 1, -1)^T$, 即为所求公共解。

108. 解: 两个方程组的系数矩阵记为 A_1, A_2 , $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix}$.

由两个方程组同解, 得 (1) $r(A_1)=r(A_2) \leq 2$; (2) A_1 与 A_2 的行向量组等价.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{a=2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a=2 \text{ 时, } r(A_1)=2. \text{ 此时, 方程组 (i) 化简为 } \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

记 $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 可知 $r(A_1)=r(A_2)=r(A_3)=2$, 且 A_3 与 A_2 的行向量组等价.

$$\text{令 } A = \begin{pmatrix} A_3 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } r(A)=r(A_3)=2, \text{ 对 } A \text{ 做行初等变换, 得}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-b-1 \\ 0 & 0 & c-b^2-1 \end{pmatrix}, \text{ 从而 } \begin{cases} c=b+1 \\ c=b^2+1 \end{cases},$$

得到两组解 $\begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$, $\begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases}$, 后者使得 $r(A_2)=1 \neq 2$, 舍去.

综上, 得 $a=2$, $b=1$, $c=2$.

109. 解 设所求方程组为 $Ax=0$, 由题设 $A[\xi_1, \xi_2]=0$, 记 $B=[\xi_1, \xi_2]$,

则 $AB=0$ 即 $B^T A^T=0$, 这说明 A^T 的列都是方程组 $B^T x=0$ 的解.

把 $B^T x=0$ 的解 (只需要基础解系) 作为列拼成 A^T 即可.

解方程组 $B^T x=0$, 得基础解系为 $\alpha_1=(1, -2, 1, 0)^T$, $\alpha_2=(2, -3, 0, 1)^T$

$$\text{令 } A^T=[\alpha_1, \alpha_2], \quad A=\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即所求的齐次线性方程组为 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.

四、证明题

110. 设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个特解, ξ_1, ξ_2 是其导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系. 试证明

(1) $\eta_1=\eta_0+\xi_1$, $\eta_2=\eta_0+\xi_2$ 均是 $Ax=b$ 的解; (2) η_0, η_1, η_2 线性无关.

证明 (1) $A\eta_1=A(\eta_0+\xi_1)=A\eta_0+A\xi_1=b$,

$$A\eta_2=A(\eta_0+\xi_2)=A\eta_0+A\xi_2=b$$

所以 η_1, η_2 均是 $Ax=b$ 的解.

(2) 设有系数 k_0, k_1, k_2 , 使得 $k_0\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2=0$

将 $\eta_1=\eta_0+\xi_1$, $\eta_2=\eta_0+\xi_2$ 代入上式, 整理得

$$(k_0+k_1+k_2)\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2=0, \quad (*)$$

等号两边同时左乘 A , 得

$$(k_0+k_1+k_2)A\eta_0+k_1A\xi_1+k_2A\xi_2=(k_0+k_1+k_2)b=0$$

所以 $k_0+k_1+k_2=0$. 代入 (*) 式, 有 $k_1\xi_1+k_2\xi_2=0$

由于 ξ_1, ξ_2 线性无关, 故 $k_1 = k_2 = 0$, 从而 $k_0 = 0$

所以 η_0, η_1, η_2 线性无关.

111. 证明: $\because AX=0, \forall X \in R^{n \times 1}$ 成立, 特别地, 取 $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$

$$\text{则 } AX_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, AX_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, AX_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ 且 } AX_1 = AX_2 = \dots = AX_n = 0,$$

$\therefore A$ 的任一列均为零向量, 即 $A=O$.

112. 证明 由于 η_1, η_2 可由 ξ_1, ξ_2 线性表示, 所以 η_1, η_2 也是齐次方程组 $Ax=0$ 的解;

并且 $\xi_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}, \xi_2 = \frac{\eta_1 - \eta_2}{2}$, 故 ξ_1, ξ_2 也可由 η_1, η_2 线性表示,

$\therefore$ 向量组 ξ_1, ξ_2 与向量组 η_1, η_2 等价, η_1, η_2 也是 $AX=0$ 的基础解系.

113. 证明 显然 $Ax=0$ 的基础解系含三个线性无关的解向量. 由齐次线性方程组解的性质, 知 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 为 $Ax=0$ 的解. 只须证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) K$$

而 $R(K)=3 \Rightarrow R(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3,$

即 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

114. 证 因为 $A_1x=0$ 的解全是 $A_2x=0$ 的解, 所以 $A_1x=0$ 与 $\begin{cases} A_1x=0 \\ A_2x=0 \end{cases}$ 同解.

则有 $n - r(A_1) = n - r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, 即 $r(A_1) = r \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$

所以 A_2 的行向量可以由 A_1 的行向量线性表出.

115. 证明 设 A 的秩为 r_1 , B 的秩为 r_2 , 则由 $AB=0$ 知, B 的每一列向量都是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解向量.

(1) 当 $r_1 = n$ 时, 该齐次线性方程组只有零解, 故此时 $B = 0$,

$r_1 = n$, $r_2 = 0$, $r_1 + r_2 = n$ 结论成立.

(2) 当 $r_1 < n$ 时, 该齐次方程组的基础解系中含有 $n - r_1$ 个向量, 从而 B

的列向量组的秩 $\leq n - r_1$, 即 $r_2 \leq n - r_1$, 此时 $r_2 \leq n - r_1$, 结论成立。

综上, $R(A) + R(B) \leq n$.

116. 证明 $\because A(A - E) = A^2 - A = A - A = 0$

所以由 21 题所证可知 $R(A) + R(A - E) \leq n$

又 $\because R(A - E) = R(E - A)$

由 11 题所证可知

$$R(A) + R(A - E) = R(A) + R(E - A) \geq R(A + E - A) = R(E) = n$$

由此 $R(A) + R(A - E) = n$.

117. 证明

(1) 反证法, 假设 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性相关, 则存在着不全为 0 的数 $C_0, C_1, \dots, C_{n-r}$, 使得

$$C_0 \eta^* + C_1 \xi_1 + \dots + C_{n-r} \xi_{n-r} = 0 \quad (1)$$

其中, $C_0 \neq 0$, 否则, $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性相关, 与其为基础解系矛盾。

由于 η^* 为特解, $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 为基础解系, 故得

$$A(C_0 \eta^* + C_1 \xi_1 + \dots + C_{n-r} \xi_{n-r}) = C_0 A \eta^* = C_0 b$$

而由 (1) 式可得 $A(C_0 \eta^* + C_1 \xi_1 + \dots + C_{n-r} \xi_{n-r}) = 0$

故 $b = 0$, 而题中, 该方程组为非齐次线性方程组, 得 $b \neq 0$

产生矛盾, 假设不成立, 故 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关。

(2) 反证法, 假设 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性相关, 则存在着不全为零的 $C_0, C_1, \dots, C_{n-r}$,

使得 $C_0 \eta^* + C_1 (\eta^* + \xi_1) + \dots + C_{n-r} (\eta^* + \xi_{n-r}) = 0 \quad (2)$

即 $(C_0 + C_1 + \dots + C_{n-r}) \eta^* + C_1 \xi_1 + \dots + C_{n-r} \xi_{n-r} = 0$

1) 若 $C_0 + C_1 + \dots + C_{n-r} = 0$, 由于 $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 是线性无关的一组基础解系, 故

$C_0 = C_1 = \cdots = C_{n-r} = 0$, 由(2)式得 $C_0 = 0$, 此时 $C_0 = C_1 = \cdots = C_{n-r} = 0$ 与假设矛盾.

2) 若 $C_0 + C_1 + \cdots + C_{n-r} \neq 0$ 由题(1)知, $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关, 故

$C_0 + C_1 + \cdots + C_{n-r} = C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-r} = 0$ 与假设矛盾,

综上, 假设不成立, 原命题得证.

118. 证明 设 x 为 $Ax = b$ 的任一解.

由题设知: $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r+1}$ 线性无关且均为 $Ax = b$ 的解.

取 $\xi_1 = \eta_2 - \eta_1, \xi_2 = \eta_3 - \eta_1, \cdots, \xi_{n-r} = \eta_{n-r+1} - \eta_1$, 则它的均为 $Ax = b$ 的解.

用反证法证: $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关. 设它们线性相关, 则存在不全为零的数 $l_1, l_2, \cdots, l_{n-r}$,

使得
$$l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 + \cdots + l_{n-r} \xi_{n-r} = 0$$

即
$$l_1(\eta_2 - \eta_1) + l_2(\eta_3 - \eta_1) + \cdots + l_{n-r}(\eta_{n-r+1} - \eta_1) = 0$$

亦即
$$-(l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-r})\eta_1 + l_1\eta_2 + l_2\eta_3 + \cdots + l_{n-r}\eta_{n-r+1} = 0$$

由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r+1}$ 线性无关, 知 $-(l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-r}) = l_1 = l_2 = \cdots = l_{n-r} = 0$,

矛盾, 故假设不对.

$\therefore \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

由于 x, η_1 均为 $Ax = b$ 的解,

所以 $x - \eta_1$ 为 $Ax = b$ 的解 $\Rightarrow x - \eta_1$ 可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表出.

$$\begin{aligned} x - \eta_1 &= k_2 \xi_1 + k_3 \xi_2 + \cdots + k_{n-r+1} \xi_{n-r} \\ &= k_2(\eta_2 - \eta_1) + k_3(\eta_3 - \eta_1) + \cdots + k_{n-r+1}(\eta_{n-r+1} - \eta_1) \\ x &= \eta_1(1 - k_2 - k_3 - \cdots - k_{n-r+1}) + k_2\eta_2 + k_3\eta_3 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1} = 0 \end{aligned}$$

令 $k_1 = 1 - k_2 - k_3 - \cdots - k_{n-r+1}$, 则 $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$

$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$, 证毕.