
线性代数习题册

2023 年版

数据科学与人工智能学院编

第二章 矩阵

§ 2.1 矩阵的概念

§ 2.2 矩阵的运算

§ 2.3 n 阶矩阵, 方阵的行列式

§ 2.4 几种特殊的矩阵

§ 2.5 分块矩阵

§ 2.6 逆矩阵

§ 2.7 矩阵的初等变换

§ 2.8 矩阵的秩

第二章习题答案

§ 2.1 矩阵的概念

§ 2.2 矩阵的运算

§ 2.3 n 阶矩阵, 方阵的行列式

§ 2.4 几种特殊的矩阵

§ 2.5 分块矩阵

一、填空

1. 设 A 是 $p \times 5$ 阶矩阵, B 是 $m \times 4$ 阶矩阵, AB 是 $7 \times q$ 阶矩阵, 则 p, q, m 的值分别是_____.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 7 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} u & v \\ y & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ x & y \end{pmatrix}$ 且 $A + 2B = C$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____, $u =$ _____, $v =$ _____.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{100} =$ _____.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $|3AA^T| =$ _____.

5. 已知 $\alpha = (1, 1, 1)$, 则 $|\alpha^T \alpha| =$ _____.

6. 若 $\alpha = (1, -1, 2)^T$, $\beta = (3, 8, 2)^T$ 则 $A = \alpha\beta^T =$ _____, $A^{2021} =$ _____.

7. 设 α 为 3×1 列矩阵, α^T 是 α 的转置, 若 $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha^T \alpha =$ _____.

8. 设 A 是 5 阶方阵, 且 $|A| = 1$, 则 $|-2A| =$ _____.

9. 设 A 为 3×3 矩阵, B 为 4×4 矩阵, 且 $|A| = 1, |B| = -2$, 则 $||B|A| =$ _____.

10. 设 $\alpha = (1, 2, 3)^T$, $\beta = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})^T$, $A = \alpha\beta^T$, 则 $A^n =$ _____.

11. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 而 $n \geq 2$ 为正整数, 则 $A^n - 2A^{n-1} =$ _____.

12. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 满足 $A^2 B - A - B = E$, 则 $|B| =$ _____.

13. 设 3 阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $B = [\beta_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A + B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. A 为 3 阶方阵, 且 $|A| = -2$, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, 则 $\begin{vmatrix} A_3 - 2A_1 \\ 3A_2 \\ A_1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 设 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = \alpha \neq 0$, 将 A 按列分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 若矩阵 $B = (\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_3)$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 设 A 为三阶方阵, $|A| = -2$, 把 A 按列分块为 $A = (A_1, A_2, A_3)$, 其中 $A_j (j=1,2,3)$ 为 A 的第 j 列, 则 $|A_3 - 2A_1, 3A_2, A_1| = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 设 2 阶矩阵 $A = (\alpha, \beta)$, $B = \alpha\beta^T - \beta\alpha^T$, 若 $|A| = -2$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、单项选择

18. 设 A, B 是 n 阶方阵, $A \neq 0$ 且 $AB = 0$, 则 ().

- (A) $|B| = 0$ 或 $|A| = 0$; (B) $B = 0$;
(C) $BA = 0$; (D) $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

19. 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $A(B-E) = 0$, 则 ().

- (A) $A = 0$ 或 $B = 0$; (B) $|A| = 0$ 或 $|B-E| = 0$;
(C) $|A| = 0$ 或 $|B| = 1$; (D) $A = BA$.

20. 设 A 是 n 阶方阵, 则 $|A| = 0$ 的必要条件是 ().

- (A) 两行(列)元素对应成比例; (B) 必有一行为其余行的线性组合;
(C) A 中有一行元素全为零; (D) 任一行为其余行的线性组合.

21. 设 A 是 n 阶方阵, 如果 $A = \frac{1}{2}E$, 则 $|A| = ()$.

- (A) $\frac{1}{2^n}$, (B) $\frac{1}{2^{n-1}}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2.

22. A 是 n 阶方阵, 若已知其行列式为 m , 则 $|-A|A^T$ 的值为 ().

- (A) $(-1)^{n^2} m^{n+1}$; (B) $(-1)^n m^{n+1}$; (C) $(-1)^{n^2} m^n$; (D) $(-1)^n m^n$.

23. 设 A, B 是 $n (n \geq 2)$ 阶方阵, 则必有 ().

(A) $|A+B| = |A| + |B|$; (B) $||A|B| = ||B|A||$;

(C) $|AB| = |BA|$; (D) $|A-B| = |B-A|$.

三、计算

24. 计算下列乘积:

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (2) $(1, 2, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 2)$;

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; (5) $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

25. 设 $f(x) = x^2 - x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $f(A)$.

26. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $3AB - 2A$ 及 $A^T B$.

27. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 问:

(1) $AB = BA$ 吗?

(2) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 吗?

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 吗?

28. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, 求 $A^2, A^3, \dots, A^k$.

29. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 求 A^k .

30. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & O \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ O & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $|A^8|$ 及 A^4 .

31. 取 $A = B = -C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 验证 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix}$.

四、证明题

32. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 A 为对称矩阵, 证明 $B^T AB$ 也是对称矩阵.

33. 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵, 证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

34. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n (a_n \neq 0)$, n 为正整数, 证明:

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

§ 2.6 逆矩阵

§ 2.7 矩阵的初等变换

§ 2.8 矩阵的秩

一、填空

35. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 A 的伴随矩阵是 _____ .

36. 若 A 为四阶方阵, 且 $|A| = 3$, 则 $|-2A| =$ _____, $|A^{-1}| =$ _____, $|A^*| =$ _____ .

37. 设 A 为 3 阶方阵且 $|A| = 2$, 则 $|2A^{-1}| =$ _____, $|A^*| =$ _____.

38. 设 A 为 5 阶方阵, 且 $|A| = -3$, 则 $|A^{-1}| =$ _____; $|A^*| =$ _____; $|2A| =$ _____ .

39. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.

40. 设 $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ _____.

41. 设三阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 可逆, 则 x, y 应满足条件 _____.

42. 设 A 是 n 阶可逆矩阵 ($n \geq 2$), A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^* =$ _____.

43. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $|A| =$ _____; $A^{-1} =$ _____.

44. 设 A, B 为 n 阶方阵, 若 $|A| \neq 0$ 且 $AB = 0$, 则 $B =$ _____.

45. 若 $|A| \neq 0$, 且 $AB = C$, 则 $B =$ _____; 又若 $C = 0$, 则 $B =$ _____.

46. 设 A 为 3 阶方阵且 $|A| = 2$, 则 $|3A^{-1} - 2A^*| =$ _____.

47. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - A = E$ 则 $(A - E)^{-1} =$ _____.

48. 设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = O$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A - E)^{-1} =$ _____.

49. 设 $A^3 + A^2 - A = E$, 且 $|A - E| \neq 0$, 则 $A^{-1} =$ _____.

50. 设 A 是 n 阶方阵, 且满足 $A^2 + A - 5E = 0$, 则 $(A + 2E)^{-1} =$ _____.

51. 设 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.

52. 设 A, B 为 n 阶可逆方阵, 且满足 $AB = A + 2B$, 则 B 可用 A 表示为 $B =$ _____.

53. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 且三阶方阵 B 满足

$ABC = D$, 则 $|B^{-1}| =$ _____.

54. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, $|A| = 2, |B| = -3$, 则 $|2A^*B^{-1}| =$ _____.

55. 设 A 为 3 阶方阵, 且 $|A| = -2$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|4A^{-1} + A^*| =$ _____.

56. 设 A 为 2 阶可逆方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $|A^* - A^{-1}| = -4$, 则 $|A| =$ _____.

57. 设 A, B, C 都是 3 阶可逆矩阵, $|A| = -1, |B| = 2$, 则 $|2C^{-1}(A^TB^{-1})^2C| =$ _____.

58. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B , 则 $|A^*B| =$ _____.

59. 四阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 若 $|A| = 2$, 则 $|-A^2| =$ _____, $|A^* - 3A^{-1}| =$ _____;

若 $B = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1)$, 则 $r(B) =$ _____.

60. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 _____.

61. 设 A 为 5×3 矩阵, 秩 $(A) = 3$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则秩 $(AB) =$ _____.

二、单项选择

62. 设 A 是方阵, 如有矩阵关系式 $AB = AC$, 则必有 ().

(A) $A = O$; (B) $B \neq C$ 时 $A = O$;

(C) $A \neq O$ 时 $B = C$; (D) $|A| \neq 0$ 时 $B = C$.

63. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 如果 $AB = O$, 必有 ().

(A) $A = O$ 或 $B = O$; (B) $BA = O$;
(C) A 与 B 有一个不可逆; (D) A 与 B 有一个可逆.

64. n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC = E$, 其中 E 为单位矩阵, 则必有 ().

(A) $ACB = E$; (B) $CBA = E$; (C) $BAC = E$; (D) $BCA = E$.

65. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 A^{-1} 等于 ().

(A) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

66. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 则伴随矩阵 A^* 中位于第一行第二列的元素是 ().

(A) -6 ; (B) 6 ; (C) 2 ; (D) -2 .

67. 对任意同阶方阵 A, B , 下列说法正确的是 ().

(A) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$; (B) $|A+B| = |A|+|B|$;

(C) $(AB)^T = B^T A^T$; (D) $AB = BA$

68. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ().

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -bc \\ 0 & -ac & 0 \\ -ab & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -ab \\ 0 & -ac & 0 \\ -bc & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$$(C) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -bc \\ 0 & -ac & 0 \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (D) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ab \\ 0 & ac & 0 \\ -bc & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

69. 设 A 为可逆矩阵, $k \neq 0$, 则下述结论不正确的是().

$$(A) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T; \quad (B) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$(C) (kA)^{-1} = kA^{-1}; \quad (D) (kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}.$$

70. 设 A 为 n 阶矩阵满足 $A^2 + 3A + I_n = O$, I_n 为 n 阶单位矩阵, 则 $A^{-1} = ()$.

$$(A) I_n; \quad (B) A + 3I_n; \quad (C) -A - 3I_n; \quad (D) 3A + I_n.$$

71. 设 $A, B, A+B, A^{-1} + B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ 等于().

$$(A) A^{-1} + B^{-1}; \quad (B) A + B; \quad (C) A(A+B)^{-1}B; \quad (D) (A+B)^{-1}.$$

72. 设 n 阶方阵 A, B, C 均是可逆方阵, 则 $(ACB^T)^{-1} = ()$.

$$(A) (B^{-1})^{-1}A^{-1}C^{-1}; \quad (B) A^{-1}C^{-1}(B^T)^{-1}; \quad (C) B^{-1}C^{-1}A^{-1}; \quad (D) (B^{-1})^T C^{-1}A^{-1}.$$

73. 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(AB)^* = ()$.

$$(A) A^*B^*; \quad (B) B^*A^*; \quad (C) |AB|A^*B^*; \quad (D) |AB|B^*A^*.$$

74. 若 n 阶矩阵满足 $A^2 - 2A - 4I = O$, I 为同阶单位阵, 则 $(A+I)^{-1} = ()$.

$$(A) A - 2I; \quad (B) A + 2I; \quad (C) A - 3I; \quad (D) A + 3I.$$

75. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 则().

$$(A) \text{ 若 } AB = CB, \text{ 则 } A = C;$$

$$(B) \text{ 对矩阵 } (A | E) \text{ 施行若干次初等变换, 当 } A \text{ 变为 } E \text{ 时, 相应地 } E \text{ 变为 } A^{-1};$$

$$(C) A \text{ 总可以经过初等变换化为单位矩阵 } E;$$

$$(D) \text{ 以上都不对.}$$

76. 将二阶矩阵 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 1 行与第 2 行得单位矩阵, 则().

$$(A) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (B) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (C) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (D) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

77. 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + 2a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + 2a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + 2a_{33} & a_{33} \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则 ().

(A) $B = PA$; (B) $B = AP$; (C) $B = PAP^{-1}$; (D) $B = PAP^{-T}$.

78. 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必须当 ().

(A) $|A| = a(a \neq 0)$ 时, $|B| = a$; (B) 当 $|A| = a(a \neq 0)$ 时, $|B| = -a$;

(C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$; (D) 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$.

79. 设 A 为 n 阶可逆矩阵 ($n \geq 2$), 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , 则 ().

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* ; (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* ;

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$; (D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

80. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $B = E + AB$, $C = A + CA$, 则 $B - C$ 为 ().

(A) E ; (B) $-E$; (C) A ; (D) $-A$.

81. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & a-2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $R(A) = 2$, 则 $a \neq$ ().

(A) 1; (B) -4; (C) 4; (D) 2.

82. 设 A 经过初等行变换变为 B , 则 ().

(A) $r(A) < r(B)$; (B) $r(A) = r(B)$;

(C) $r(A) > r(B)$; (D) 无法判定 $r(A)$ 与 $r(B)$ 之间的关系.

83. 设 n 阶矩阵 ($n \geq 3$) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ a & 1 & a & \dots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a & a & \dots & 1 \end{pmatrix}$, 若 A 的秩为 $n-1$, 则 a 必为 ().

(A) 1; (B) $\frac{1}{1-n}$; (C) -1; (D) $\frac{1}{n-1}$.

84. 设 A 与 B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 A 与 B 的秩 ().

(A) 必有一个为 0; (B) 都小于 n ; (C) 至少一个为 n ; (D) 至多一个为 n .

三、计算

85. 用伴随矩阵公式求下列矩阵的逆:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad (5) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (6) \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \quad (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0)$$

86. 用初等变换求下列矩阵的逆:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

87. 解下列矩阵方程:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) X \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3) A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$88. \text{ 利用初等变换求解 } AX = b, \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

89. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 且 $AB = A + B$, 求 B

90. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

求矩阵 X , 使之满足 $AXB = C$.

91. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 计算 $B^2 - A^2(B^{-1}A)^{-1}$.

92. 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 求 A^{-1} 及 $|A|^8$

93. 解矩阵方程 $A^*XA = 2XA - 8E$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

94. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB = A + 2B$, 求 B .

95. 设 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 $P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{11} .

96. 设 $AX - A = 3X$, 且 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X (10 分)

97. 解矩阵方程 $\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right]^{-1}XA^{-1} = 2AX + 12E$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 求 X

98. 解矩阵方程 $AXA^{-1} = XA^{-1} + 3E$, 其中 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

99. 设 n 阶矩阵 A 及 s 阶矩阵 B 都可逆, 求 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$.

100. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

四、证明

101. 设 $A^k = O$ (k 为正整数), 证明

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

102. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = O$, 证明 A 及 $A + 2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A + 2E)^{-1}$.

103. 设方阵 A 满足 $A^2 + A - E = O$, 证明 A 可逆, 并求它的逆矩阵.

104. 设 A 是 n 阶方阵, $AA^T = E$, 且 $|A| = -1$, 求 $|A + E|$

105. 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^3 = 3A(A - I)$, 试证 $I - A$ 可逆, 并求 $(I - A)^{-1}$.

106. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^* , 证明:

(1) 若 $|A| = 0$, 则 $|A^*| = 0$;

(2) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

107. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 满足 $AB = A + B$, 证明: $A - E$ 可逆且 $AB = BA$.

108. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 且 $B = B^2, A = B + E$, 证明 A 可逆, 并求其逆.

109. 设 A, B 为 n 阶方阵, 证明 $A = O$ 的充要条件是 $A^T A = O$.

110. 证明 $A \sim B$ 的充要条件是存在可逆阵 P, Q , 使 $PAQ = B$.

111. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 满足 $AA^T = E, BB^T = E, |A| + |B| = 0$, 证明: $|A + B| = 0$.

第二章习题答案

§ 2.1 矩阵的概念

§ 2.2 矩阵的运算

§ 2.3 n 阶矩阵, 方阵的行列式

§ 2.4 几种特殊的矩阵

§ 2.5 分块矩阵

一、填空

1. 7, 5, 4; 2. -5, -6, 4, -2; 3. $\begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$; 5. 0;

6. $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ -3 & -8 & -2 \\ 6 & 16 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ -3 & -8 & -2 \\ 6 & 16 & 4 \end{pmatrix}$; 7. 3; 8. -32; 9. -8;

10. $3^{n-1}A = 3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$; 11. 0; 12. $-1/2$; 13. $4(m+n)$; 14. 6;

15. 2α ; 16. 6; 17. -4.

二、单项选择

18. A; 19. B; 20. B; 21. A; 22. A; 23. C.

三、计算

24. 解(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 7 + 3 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 7 + (-2) \times 2 + 3 \times 1 \\ 5 \times 7 + 7 \times 2 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1) = (10).$

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) & 2 \times 2 \\ 1 \times (-1) & 1 \times 2 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$(5) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$25. \text{ 解 } f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$26. \text{ 解 } 3AB - 2A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$27. \text{ 解 } (1) AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \quad \therefore AB \neq BA$$

$$(2) (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix}$$

$$\text{但 } A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(3) \quad (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\text{而} \quad A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{故} \quad (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

$$28. \text{ 解} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{可知} \quad A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$29. \text{ 解} \quad A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{由此推测} \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad (k \geq 2)$$

用数学归纳法证明:

当 $k=2$ 时, 显然成立.

假设 k 时成立, 则 $k+1$ 时,

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}$$

由数学归纳法原理知: $A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$

30. 解 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & & \\ 4 & -3 & & \\ & & 2 & 0 \\ O & & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 令 $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$,

故 $A^8 = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} A_1^8 & O \\ O & A_2^8 \end{pmatrix}$, $|A^8| = |A_1^8| |A_2^8| = |A_1|^8 |A_2|^8 = 10^{16}$

$A^4 = \begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 & & \\ 0 & 5^4 & & \\ & & 2^4 & 0 \\ O & & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}$

31. 检验: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$

而 $\begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

故 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix}$

四、证明题

32. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 A 为对称矩阵, 证明 $B^T AB$ 也是对称矩阵.

证明 已知: $A^T = A$

则 $(B^T AB)^T = B^T A^T B = B^T AB$

从而 $B^T AB$ 也是对称矩阵.

33. 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵, 证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

证明 由已知: $A^T = A \quad B^T = B$

充分性: $AB = BA \Rightarrow AB = B^T A^T \Rightarrow AB = (AB)^T$

即 AB 是对称矩阵.

必要性: $AB = (AB)^T \Rightarrow B^T A^T = AB \Rightarrow BA = AB.$

34. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n (a_n \neq 0)$, n 为正整数, 证明:

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

证明: 由 $A^k = \Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$ 知

$$f(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_nA^n = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_1^n & 0 \\ 0 & a_0 + a_1\lambda_2 + \dots + a_n\lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix}$$

§ 2.6 逆矩阵

§ 2.7 矩阵的初等变换

§ 2.8 矩阵的秩

一、填空:

35. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; 36. $48, \frac{1}{3}, 27$; 37. $4, 4$; 38. $-\frac{1}{3}, 81, -96$;

39. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; 40. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 41. $3x \neq 2y$; 42. $|A|^{n-2}A$;

43. $-6, A^{-1} = \begin{pmatrix} & 1/3 \\ 1/2 & \\ 1 & \end{pmatrix}$; 44. 0 ; 45. $B = A^{-1}C, B = 0$; 46. $-1/2$;

47. A ; 48. $\frac{A+2E}{2}$; 49. $A^{-1} = -(A+2E)$; 50. $-(A+3E)$;

51. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; 52. $(A-2E)^{-1}A$; 53. $-1/6$; 54. $-\frac{2^{2n-1}}{3}$; 55. -4 ;

56. -1 ; 57. 2 ; 58. 4 ; 59. $4, 1/2, 3$; 60. 1 ; 61. 3 .

二、单项选择:

62. D; 63. C; 64. D; 65. B; 66. B; 67. C; 68. B; 69. C;
70. C; 71. C; 72. D; 73. B; 74. C; 75. C; 76. D; 77. B;
78. D; 79. C; 80. A; 81. C; 82. B; 83. B; 84. B.

三、计算

85. 解 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad |A| = 1$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, \text{ 故 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

(2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$ (3) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix};$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix};$

(5) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix};$ (6) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$

86. 解 (1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & \frac{2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{故逆矩阵为} \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & \frac{2}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}, \quad \text{故逆矩阵为} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$87. \text{ 解 } (1) X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix};$$

$$(2) X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

$$(3) \text{ 设 } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A = CB^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(4) X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix};$$

$$(5) X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$88. \text{ 解 } (A|b) \xrightarrow{\text{行变换}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

89. 解: 由 $AB = A + B$ 可得: $B = (A - E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

90. 解: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$$

91. 解: 因为 $|A| = 2, |B| = -7$, 所以都可逆, 有

$$B^2 - A^2(B^{-1}A)^{-1} = B^2 - A^2A^{-1}B = B^2 - AB = (B - A)B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 19 \end{pmatrix}.$$

92. 解: 记 $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 则: $B^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

$$|B| = 25, |C| = -1$$

故: $A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & \\ & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & \frac{4}{25} & 0 & 0 \\ \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, |A|^8 = (|B||C|)^8 = 25^8$

93. 解 $|A| = -2, A$ 可逆, 化简方程为 $(A + E)X = 4E$

$$X = 4(A + E)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ & -4 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

94. 解 由 $AB = A + 2B$ 可得 $(A - 2E)B = A$

$$\text{故 } B = (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

95. 解: $P^{-1}AP = \Lambda$ 故 $A = P\Lambda P^{-1}$ 所以 $A^{11} = P\Lambda^{11}P^{-1}$

$$|P|=3, \quad P^*=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

而 $\Lambda^{11}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{11}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{pmatrix}$

$$\text{故 } A^{11}=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}$$

96. 解: 由于 $AX-A=3X \Rightarrow (A-3E)X=A \Rightarrow X=(A-3E)^{-1}A$

$$\text{又 } A-3E=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } (A-3E)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

97. 解: 先化简方程为: $X(4E-2A)=12E$

解得 $X=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

98. 解: 由 $|A^*|=|A|^{n-1}$, 得 $|A^*|=8$, $|A|=2$, 方程两边右乘 A 左乘 A^* :

$$A^*AX=A^*X+3A^*A, \quad |A|X=A^*X+3|A|E, \quad (2E-A^*)X=6E$$

$$X=6(2E-A^*)^{-1}$$

$$2E-A^*=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right], \quad (2E-A^*)^{-1}=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/6 \end{array}\right]$$

$$X=\begin{bmatrix} 6 \\ 0 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

99. 解 将 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$ 分块为 $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$, 其中 C_1 为 $s \times n$ 矩阵, C_2 为 $s \times s$ 矩阵,

C_3 为 $n \times n$ 矩阵, C_4 为 $n \times s$ 矩阵

$$\text{则 } \begin{pmatrix} O & A_{n \times n} \\ B_{s \times s} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix}$$

$$\text{由此得到 } \begin{cases} AC_3 = E_n \Rightarrow C_3 = A^{-1} \\ AC_4 = O \Rightarrow C_4 = O \quad (A^{-1} \text{ 存在}) \\ BC_1 = O \Rightarrow C_1 = O \quad (B^{-1} \text{ 存在}) \\ BC_2 = E_s \Rightarrow C_2 = B^{-1} \end{cases}$$

$$\text{故 } \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

$$100. \text{ 解 (1) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_2 - 3r_1 \\ \sim \\ r_3 - r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 秩为 } 2$$

$$\text{二阶子式 } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 秩为 } 2.$$

$$\text{二阶子式 } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 2r_4 \\ \sim \\ r_2 - 2r_4 \\ r_3 - 3r_4}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
r_1 \leftrightarrow r_2 \\
r_2 + 3r_1 \\
\sim \\
r_3 + 2r_1
\end{array}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}
\begin{array}{c}
r_4 \leftrightarrow r_1 \\
\sim \\
r_3 \div 14 \\
r_4 \div 16
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{array}{c}
\text{秩为 } 3 \\
r_4 - r_3
\end{array}$$

$$\text{三阶子式} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 70 \neq 0.$$

四、证明

101. 设 $A^k = O$ (k 为正整数), 证明 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

证明 由 $A^k = O$ 有

$$\begin{aligned}
& (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})(E - A) \\
&= (E - A) + (A - A^2) + A^2 - \cdots - A^{k-1} + (A^{k-1} - A^k) = E
\end{aligned}$$

故有 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$

102. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = O$, 证明 A 及 $A + 2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A + 2E)^{-1}$.

证明 由 $A^2 - A - 2E = O$ 得 $A^2 - A = 2E$

两端同时取行列式: $|A^2 - A| = 2^n$

即 $|A||A - E| = 2^n$, 故 $|A| \neq 0$

所以 A 可逆, 而 $A + 2E = A^2$

$$|A + 2E| = |A^2| = |A|^2 \neq 0 \quad \text{故 } A + 2E \text{ 也可逆.}$$

$$A^2 - A - 2E = O \Rightarrow A(A - E) = 2E$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E)$$

$$\text{又由 } A^2 - A - 2E = O \Rightarrow (A + 2E)A - 3(A + 2E) = -4E$$

$$\Rightarrow (A + 2E)(A - 3E) = -4E$$

$$\therefore (A+2E)^{-1} = \frac{1}{4}(3E-A)$$

103. 设方阵 A 满足 $A^2 + A - E = O$, 证明: A 可逆并求它的逆矩阵。

证明 由 $A^2 + A - E = O$,

得 $A(A+E) = E$,

所以 $A+E$ 可逆, 且 $(A+E)^{-1} = A$.

104. 设 A 是 n 阶方阵, $AA^T = E$, 且 $|A| = -1$, 求 $|A+E|$

证明:

$$\begin{aligned} |A+E| &= |A+AA^T| = |A(E+A^T)| = |A||A^T+E| = -|A^T+E| \\ &= -|(A+E)^T| = -|A+E| \Rightarrow 2|A+E| = 0 \Rightarrow |A+E| = 0 \end{aligned}$$

105. 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^3 = 3A(A-I)$, 试证 $I-A$ 可逆, 并求 $(I-A)^{-1}$.

证明: (略)

106. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^* , 证明:

$$(1) \text{ 若 } |A| = 0, \text{ 则 } |A^*| = 0; \quad (2) \quad |A^*| = |A|^{n-1}.$$

证明 (1) 用反证法证明. 假设 $|A^*| \neq 0$ 则有 $A^*(A^*)^{-1} = E$

$$\text{由此得 } A = AA^*(A^*)^{-1} = |A|E(A^*)^{-1} = O \therefore A^* = O$$

这与 $|A^*| \neq 0$ 矛盾, 故当 $|A| = 0$ 时, 有 $|A^*| = 0$

$$(2) \text{ 由于 } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, \text{ 则 } AA^* = |A|E$$

$$\text{取行列式得到: } |A||A^*| = |A|^n$$

$$\text{若 } |A| \neq 0 \text{ 则 } |A^*| = |A|^{n-1}$$

若 $|A| = 0$ 由 (1) 知 $|A^*| = 0$ 此时命题也成立

$$\text{故有 } |A^*| = |A|^{n-1}$$

107. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 满足 $AB = A+B$, 证明: $A-E$ 可逆且 $AB = BA$.

$$\text{证明: } AB = A+B \Rightarrow AB-B = A \Rightarrow (A-E)B = A \Rightarrow (A-E)B - (A-E) = E$$

$\Rightarrow (A-E)(B-E)=E$, 故 $A-E$ 可逆;

$$(B-E)(A-E)=E \Rightarrow BA-B+A+E=E \Rightarrow BA=A+B=AB$$

故 $AB=BA$ 得证.

108. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 且 $B=B^2, A=B+E$, 证明 A 可逆, 并求其逆.

证明: $A+B=E \Rightarrow B=A-E$, 由 $B=B^2$ 知, $(A-E)^2=A-E$,

$$A^2-2A+E=A-E \Rightarrow A^2-3A=-2E \Rightarrow A(A-3E)=-2E \Rightarrow A\left[-\frac{1}{2}(A-3E)\right]=E$$

$$\therefore A \text{ 可逆, 且 } A^{-1}=\frac{3}{2}E-\frac{1}{2}A.$$

109. 设 A, B 为 n 阶方阵, 证明 $A=O$ 的充要条件是 $A^T A=O$.

证明: 必要性: 显然;

充分性: 记 $A=(a_{ij})_{n \times n}$, 则 $A^T=(a_{ji})_{n \times n}$, 记 $C=A^T A$, 则 $c_{ii}=\sum_{j=1}^n a_{ji}^2, \forall i=1, 2, \dots, n$

$$\because C=O, \therefore c_{ii}=0, \text{ 即 } a_{ji}=0, \forall i=1, 2, \dots, n, \forall j=1, 2, \dots, n$$

$$\therefore A=O.$$

110. 证明 $A \sim B$ 的充要条件是存在可逆阵 P, Q , 使 $PAQ=B$.

证明: $A \sim B \Leftrightarrow \exists$ 初等方阵 $P_1, P_2, \dots, P_r, Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ 使 $P_1 P_2 \dots P_r A Q_1 Q_2 \dots Q_s = B$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ 可逆阵 } P=P_1 P_2 \dots P_r, \text{ 可逆阵 } Q=Q_1 Q_2 \dots Q_s, \text{ 使 } PAQ=B.$$

111. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 满足 $AA^T=E, BB^T=E, |A|+|B|=0$, 证明: $|A+B|=0$.

证明: (略)