
线性代数习题册

2022 年版

数据科学与人工智能学院编

第四章 矩阵的特征值

§ 4.1 矩阵的特征值与特征向量

§ 4.2 相似矩阵与矩阵对角化

§ 4.3 实对称矩阵的特征值和特征向量

第四章习题答案

§ 4.1 矩阵的特征值与特征向量

§ 4.2 相似矩阵与矩阵对角化

一、填空

1. 已知 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 为 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的特征向量, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 6 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 10 & 8 \end{pmatrix}$, 已知 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 是它的一个特征向量, 则 α 所对应的特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 若向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ 为矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 已知 0 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ 的特征值, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, A 的其余特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设 A 为 n 阶奇异矩阵, 则 A 一定有特征值 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 已知 $A^2 = E$, 则 A 的特征值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. 设矩阵 A 的各行元素之和都等于 2, 则 A 必有特征值 $\underline{\hspace{2cm}}$, 对应特征向量为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
9. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 3$ (二重), $\lambda_2 = 12$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 三阶矩阵 A 的三个特征值为 1, 2, 3, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$, A^{-1} 的特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 则 x, y 应满足的关系为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
12. 已知 3 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, $R(A) = 2$, 则 A 的相特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, 2, -3$, 则 $|A^* - 3A + 2E| =$ _____.

14. 设 $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & x & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 A 的特征值为 $2, 3, 3$, 则 x 为 _____.

15. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 则 $(2A^*)^{-1}$ 的特征值为 _____.

16. 设 3 阶矩阵 A 的行列式 $|A| = 8$, 已知 A 有 2 个特征值 -1 和 4 , 则另一特征值为 _____.

17. 若 n 阶方阵 A 相似于 $\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & & & \\ & -3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ _____.

18. 设矩阵 A 与 B 相似, 已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, 矩阵 B 有特征值 $1, 2, 3$, 则 $x =$ _____.

19. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ x & y \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 相似, 则 x 为 _____, y 为 _____.

20. A 和 B 为 n 阶矩阵, AB 有特征值 2 , 则 $BA + 3E$ 一定有特征值 _____.

21. 若三阶矩阵 A , A 的特征值为 $1, 2, -1$, 则行列式 $|A^{-1} - A^*| =$ _____.

22. 设 $\alpha_1 = [1, 2, 0]^T$, $\alpha_2 = [1, 0, 1]^T$ 都是三阶方阵 A 的属于特征值 $\lambda = 12$ 的特征向量, 而 $\beta = [-1, 2, -2]^T$, 则 $A\beta =$ _____.

23. 若 4 阶矩阵 A 与 B^{-1} 相似, A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式 $|B - E| =$ _____.

24. 已知 A 相似于 B , 且 $A^m = A (m \in N)$, 则 $B^m =$ _____.

25. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2b & 0 \end{pmatrix}$ 可相似对角化, 则 a 与 b 的关系为 _____.

26. 3 阶单位阵交换 1, 3 两列得 B , A 与 B 相似, 则 $R(A + E)$ 与 $R(A - E)$ 的和为 _____.

二、单项选择

27. 设 A 为方阵, α_1, α_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个不同的解向量, 则 () 是 A 的特征向量.

- (A) α_1 与 α_2 ; (B) $\alpha_1 + \alpha_2$; (C) $\alpha_1 - \alpha_2$; (D) 前三个选项都是.

28. 三阶矩阵 A 的特征值为 $1, -2, 3$, 则下列矩阵中非奇异矩阵是 () .

- (A) $A + 2E$; (B) $2E - A$; (C) $E - A$; (D) $A - 3E$.

29. 与可逆阵 A 必有相同特征值的矩阵是 () .

- (A) A^{-1} ; (B) A^2 ; (C) A^T ; (D) A^* .

30. 设 A 是一个 n (≥ 3) 阶方阵, 下列陈述中正确的是 () .

- (A) 如存在数 λ 和向量 α , 使 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量;
(B) 如存在数 λ 和非零向量 α , 使 $(\lambda E - A)\alpha = 0$, 则 λ 是 A 的特征值;
(C) A 的 2 个不同的特征值可以有同一个特征向量;
(D) 如 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A 的 3 个互不相同的特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 依次是 A 的属于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的

特征向量, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 有可能线性相关.

31. 设 λ_0 是矩阵 A 的特征方程的 3 重根, A 的属于 λ_0 的线性无关的特征向量的个数为 k , 则必有 () .

- (A) $k \leq 3$; (B) $k < 3$; (C) $k = 3$; (D) $k > 3$.

32. 设 A 是 3 阶矩阵, $|A| = 0$, α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, α_3 是 A 的属于其特征值 1 的特征向量, 则下列不是 A 的特征向量的是 () .

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2$; (B) $\alpha_1 - \alpha_2$; (C) $\alpha_1 + \alpha_3$; (D) $-\alpha_3$.

33. 已知 A 是 3 阶方阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A 的互不相等的特征值, 对应特征向量分别为

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 则向量组 $\beta, A\beta, A^2\beta$ () .

- (A) 线性相关; (B) 线性无关; (C) 可能线性相关; (D) 相关性由矩阵 A 决定.

34. 设 λ_1, λ_2 是 A 的特征值, α_1, α_2 分别是 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 () .

- (A) $\lambda_1 = \lambda_2$ 时, α_1, α_2 一定成比例;
(B) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时, 若 $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3$ 是特征值, 则对应的特征向量是 $\alpha_1 + \alpha_2$;
(C) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时, $\alpha_1 + \alpha_2$ 不可能是特征向量; (D) $\lambda_1 = 0$, 有 $\alpha_1 = 0$.

35. 设 A 为 2 阶方阵, α_1, α_2 是二维线性无关列向量, $A\alpha_1 = 0$, $A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为 ().

- (A) -1; (B) 1; (C) -2; (D) 2.

36. 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 A 与 B 相似, 则 ().

- (A) $\lambda E - A = \lambda E - B$; (B) A 与 B 有相同的特征值与特征向量;
(C) A 与 B 都相似于同一对角阵; (D) 对任意常数 t , 有 $tE - A$ 与 $tE - B$ 相似.

37. 设 A 为 2 阶实矩阵, $|A| < 0$, 则矩阵 A ().

- (A) 可对角化; (B) 不可对角化; (C) 与反对称阵相似; (D) 以上都不对.

38. 若方阵 A 与 B 相似, 则有 ().

- (A) $A - \lambda E = B - \lambda E$; (B) $|A| = |B|$;
(C) 对于相同的特征值 λ , 矩阵 A 与 B 有相同的特征向量;
(D) A 与 B 均与同一个对角矩阵相似.

39. 设 A 为 n 阶矩阵, 则 A 以 0 为特征值是 $|A| = 0$ 的 ().

- (A) 充分非必要条件; (B) 必要非充分条件;
(C) 既非充分又非必要条件; (D) 充分必要条件.

40. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 ().

- (A) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

41. 与矩阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ 相似的矩阵是 ().

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

42. 设 A 与 B 都是 n 阶的方阵, 则下面不对的是 ().

- (A) $|AB| = |BA|$; (B) AB 与 BA 有相同的特征值;
(C) AB 与 BA 相似; (D) AB 与 BA 的对角元素之和相等.

43. 方阵 A 与 B 相似的充分条件是 ().

(A) $|A|=|B|$;

(B) $r(A)=r(B)$;

(C) A 与 B 有相同的特征值且这些特征值互异;

(D) A 与 B 有相同的特征值.

44. n 阶方阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量是 A 与对角矩阵相似的 () 条件.

(A) 充分条件;

(B) 必要条件;

(C) 充分必要条件;

(D) 既不充分也不必要

45. n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的 ().

(A) 充分必要条件;

(B) 充分而非必要条件;

(C) 必要而非充分条件;

(D) 既非充分又非必要条件.

46. 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 已知矩阵 A 相似于 B , 则秩 $(A-2E)$ 与秩 $(A-E)$ 之和等于 ().

(A) 2;

(B) 3;

(C) 4;

(D) 5.

47. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是 ().

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

48. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $y =$ ().

(A) -1;

(B) 1;

(C) 2;

(D) 3.

49. 设 n 阶实矩阵 A 与 B 相似, 即 $A \sim B$, E 为单位阵, 则 ().

(A) $\lambda E - A = \lambda E - B$;

(B) $A^2 \sim B^2$;

(C) A 与 B 有相同的特征值和特征向量;

(D) A 与 B 相似与同一对角矩阵.

三、计算

50. 求下列矩阵的特征值及相对应的特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

51. 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量, 且满足

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$$

(1) 求矩阵 B , 使得 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]B$; (2) 求矩阵 A 的特征值;

(3) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

52. 三阶矩阵 A 的第一行元素全是 1, 且 $(1,1,1)^T, (1,0,-1)^T, (1,-1,0)^T$ 是 A 的特征向量, 求 A .

53. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的一个特征值为 3, 求 y .

54. 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y .

55. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$; 对应的特征向量依次为 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 求 A .

56. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值与特征向量, 求将 A 对角化的可逆阵 P .

57. 设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$.

(1) 求 x 和 y 的值; (2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$.

58. 设 $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{101} .

59. 设三维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, A 为三阶矩阵, 且满足

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, \quad A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$$

(1) 求 A 的特征值; (2) 求将矩阵 A 对角化的可逆阵 P .

60. 设 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 A 的属于特征值 -2 的特征向量,

(1) 求 a, b 的值; (2) 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Q , 使得 $P^{-1}AP = Q$.

61. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ 可逆, 向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 A^* 的一个特征向量, λ 是 α 对应的

特征值, 其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵. 试求 a, b 和 λ 的值.

62. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, 其行列式 $|A| = -1$, 又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ ,

属于 λ 的特征向量为 $\alpha = (-1 \ -1 \ 1)^T$, 求 a, b, c 和 λ 的值.

四、证明题

63. 证明: 如果方阵 A 满足 $A^2 = A$, 则 A 的特征值等于 0 或 1 .

64. 证明: 如果 λ 是可逆阵 A 的特征值, 则 $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值.

65. 证明: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与二阶单位矩阵 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 有相同的特征值, 但不相似.

66. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 且 $|A| \neq 0$, 证明 AB 与 BA 相似.

67. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明 A 必可对角化.

68. 设 A 是三阶方阵, ξ, α, β 是 3 个线性无关的三维列向量, 其中 $AX = 0$ 有解 ξ ,

$AX = \beta$ 有解 α , $AX = \alpha$ 有解 β , 证明 A 可以相似对角化, 并求与之相似的对角阵.

69. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - 2A - 3E = 0$, 证明 A 必可相似对角化.

70. 设 n 阶矩阵 $A \neq 0$, 而 $A^k = 0$ (k 为正整数), 证明 A 不能相似对角化.

§ 4.3 实对称矩阵的特征值和特征向量

一、填空

71. 设向量 α, β 的长度依次为 2 和 3, 则向量内积 $(\alpha + \beta, \alpha - \beta) =$ _____.

72. α 是单位向量, α, β 正交, 则内积 $(\alpha + |\beta|\beta, -2\alpha) =$ _____.

73. 将 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 标准正交化后, 得向量 _____.

74. 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 是实正交矩阵, 且 $a_{11} = 1, b = (1, 0, 0)^T$, 则线性方程组 $Ax = b$ 的解是 _____.

75. 如果 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 则 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 =$ _____.

76. 已知 2 阶实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ 有两个不同的特征值 λ_1, λ_2 , $\xi_1 = (1, 1)^T$ 是 A 属于 λ_1 的特征向量, 则 $a =$ _____, $\lambda_1 =$ _____, A 属于 λ_2 的全部特征向量为 _____.

77. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, β_1, β_2 是属于 A 的不同特征值的特征向量, 则 3 阶方阵 $B = (\beta_1, \beta_2, 3\beta_2)$ 的秩 $R(B) =$ _____, $\beta_1^T \beta_2 =$ _____.

78. 设 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 是实对称阵 A 的特征值, $\alpha = (-1, t+2, 3)^T, \beta = (-2+2t, 1, 2)^T$ 是分别属于 1, 2 的特征向量, 则 $t =$ _____.

79. 已知 5 阶对称矩阵 A 满足 $A^2 = 3A, r(A) = 3$, 则 A 的迹 $tr(A)$ 为 _____.

二、单项选择

80. 设 A 是正交矩阵, 则下列结论错误的是 ().

(A) $|A|^2$ 必为 1;

(B) $|A|$ 必为 1;

(C) $A^{-1} = A^T$;

(D) A 的行 (列) 向量组是正交单位向量组.

81. 下列向量中, 与 $\alpha = (1, -1, 1)^T$ 正交的向量是 ().

(A) $(1, -1, 0)^T$;

(B) $(-1, 0, -1)^T$;

(C) $(-1, 1, 0)^T$;

(D) $(-1, 0, 1)^T$.

82. 若 $0, -1$ 是实对称矩阵 A 的特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 A 的属于 0 的一个特征向量组, β_1, β_2 是 A 的属于 -1 的一个特征向量组, 则 ().

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 一定是线性无关向量组; (B) α_1, β_2 一定正交;
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 一定是线性相关向量组; (D) 前三个选项都不正确.

83. 设 n 阶实对称阵 A 满足 $A^9 = 0$ (其中 $n < 9$), 则下列陈述中不正确的是 ().

- (A) A 的特征值是零; (B) A 可以相似对角化;
(C) $A \neq 0$; (D) $A + E$ 是可逆矩阵.

84. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, P 是 n 阶可逆阵, 已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 则 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是 ().

- (A) $P^{-1}\alpha$; (B) $P^T\alpha$; (C) $P\alpha$; (D) $(P^{-1})^T\alpha$.

85. 如果 3 阶实对称阵 A 满足 $A^k = 0 (k \in N)$, 则 $R(A)$ 为 ().

- (A) 2; (B) 1; (C) 0; (D) 3.

86. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 则 ().

- (A) A 的 n 个特征向量两两正交; (B) A 的 n 个特征向量组成单位正交向量组;
(C) A 的 k 重特征值 λ_0 , 有 $r(\lambda_0 I - A) = n - k$;
(D) A 的 k 重特征值 λ_0 , 有 $r(\lambda_0 I - A) = k$.

三、计算

87. 试用施密特法把下列向量组正交化:

$$(1) (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad (2) (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

88. 用施密特正交化方法, 将下列向量组化为正交的单位向量组.

$$(1) \alpha_1 = (0, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 0, 1)^T;$$

$$(2) \alpha_1 = (1, -2, 2)^T, \alpha_2 = (-1, 0, -1)^T, \alpha_3 = (5, -3, -7)^T.$$

89. 下列矩阵是不是正交阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

90. 求下列矩阵的特征值和特征向量, 并问它们的特征向量是否两两正交?

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n), (a_1 \neq 0).$$

91. 试求一个正交的相似变换矩阵, 将下列对称矩阵化为对角矩阵.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$92. (1) \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ 求 } \varphi(A) = A^{10} - 5A^9;$$

$$(2) \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 求 } \varphi(A) = A^{10} - 6A^9 + 5A^8.$$

$$93. \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. (1) \text{ 求正交阵 } P, \text{ 使得 } P^{-1}AP = \Lambda \text{ 为对角阵};$$

$$(2) \text{ 设 } f(x) = x^3 + 2x^2 + 3, \text{ 利用 } A \text{ 与 } \Lambda \text{ 相似, 求出矩阵 } f(A) = A^3 + 2A^2 + 3E;$$

$$(3) \text{ 求矩阵 } f(A) = A^3 + 2A^2 + 3E \text{ 的特征值}.$$

$$94. \text{ 设 } \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T, \text{ 求 } \alpha_2, \alpha_3 \text{ 使 } Q = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \text{ 为正交矩阵}.$$

95. 设 3 阶对称矩阵阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$,

(1) 求正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 成为对角矩阵; (2) 计算 A^n .

96. 3 阶实对称阵 A 的 3 个特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 $\lambda_1 = -1$ 的特征向量为

$$\alpha_1 = (0, 1, 1)^T. \text{ 求 (1) } A; (2) B = A^3 - 5A^2 \text{ 的相似对角阵; (3) } |A^* - 5E|.$$

97. 设 3 阶实对称阵 A 的特征值为 6, 3, 3, 且对应于 6 的特征向量为 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求 A .

98. 设三阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量; (2) 求矩阵 B .

99. 设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2, $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值. 若 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, -3)^T$, 都是 A 的属于特征值 6 的特征向量.

(1) 求 A 的另一特征值和对应的特征向量; (2) 求矩阵 A .

100. 已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x , 使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 且满足 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$. (1) 记 $P = (x, Ax, A^2x)$, 求 3 阶矩阵 B , 使 $A = PBP^{-1}$; (2) 计算行列式 $|A + E|$.

101. 设 3 阶实对称阵 A 的各行元素之和为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1 \ 2 \ -1)^T, \alpha_2 = (0 \ -1 \ 1)^T$ 是线性方程组 $AX = 0$ 的解. (1) 求 A 的特征值与特征向量; (2) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

四、证明题

102. 设 A 与 B 都是 n 阶正交阵, 证明 AB 也是正交阵.

103. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 为 $n-1$ 个线性无关的 n 维列向量, β_1 和 β_2 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 都正交, 证明 β_1, β_2 线性相关.

104. 设 x 是 n 维列向量, $x^T x = 1$, 令 $H = E - 2xx^T$, 证明 H 是对称正交矩阵.

证明 提示: 只需证 $H^T H = E$ 即可.

105. 已知 3 阶实对称阵 A 满足 $A^3 + 3A^2 + 6A + 4E = 0$, 证明 $A = -E$.

第四章习题答案

§ 4.1 矩阵的特征值与特征向量

§ 4.2 相似矩阵与矩阵对角化

一、填空

1. $-3, 0$; 2. 1 ; 3. 0 ; 4. $0, 2, 2$; 5. 0 ; 6. ± 1 ; 7. $3, 0, 5$; 8. $2, [1, 1, \dots, 1]^T$; 9. 4 ; 10. $6, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; 11. $x + y = 0$; 12. $0, 1, 1$; 13. 637 ; 14. 0 ; 15. $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$; 16. -2 ; 17. $-3E$; 18. 2 ; 19. $-3/5, 1$; 20. 5 ; 21. $-\frac{45}{4}$; 22. 12β ; 23. 24 ; 24. B ; 25. $a = -b$; 26. 3 .

二、单项选择

27. C; 28. B; 29. C; 30. B; 31. A; 32. C; 33. B; 34. C; 35. B; 36. D; 37. A; 38. B; 39. D; 40. C; 41. B; 42. C; 43. C; 44. C; 45. B; 46. C; 47. A; 48. C; 49. B

三、计算

50. 解: (1) A 的特征多项式为:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

故 A 的特征值为: $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 解方程组 $(2E - A)X = 0$,

得基础解系为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 故对应于 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($k_1 \neq 0$);

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时, 解方程组 $(E - A)X = 0$,

得基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 故对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($k_2 \neq 0$).

(2) A 的特征多项式为:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^2 (\lambda+1)$$

故 A 的特征值为: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

当 $\lambda_1 = -1$ 时, 得基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 故对应于 $\lambda_1 = -1$ 的特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($k_1 \neq 0$);

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时,

得基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 故对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (k_2, k_3 不

全为 0).

(3) A 的特征多项式为:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & \lambda-2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{c_1+c_2 \\ c_3-2c_2}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^2 (\lambda-1)$$

故 A 的特征值为: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程组 $(E - A)X = 0$, 得基础解系为 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, 故特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($k_1 \neq 0$);

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时,

同理得基础解系为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 故对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (k_2, k_3

不全为 0).

(4) A 的特征多项式为:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ \xrightarrow[c_3-2c_2]{c_1-2c_2} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (7-\lambda)$$

故 A 的特征值为: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

当 $\lambda_1 = 7$ 时, 得基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 故对应于 $\lambda_1 = 7$ 的特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($k_1 \neq 0$);

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时,

得基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 故对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (k_2, k_3

不全为 0).

$$51. \text{ 解: } A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ 即 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

上式右边就是要求的得 B , A 的特征值就是 B 的特征值.

52. 解: 设这些特征向量分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 3$$

同理, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, 于是, 令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 有

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$53. \text{ 解: } |A-3E| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y-3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8(2-y) = 0, \Rightarrow y = 2.$$

54. 解: 方阵 A 与 Λ 相似, 则 A 与 Λ 的特征多项式相同, 即

$$|A-\lambda E| = |\Lambda-\lambda E| \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & x-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & y-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}.$$

55. 解: 根据特征向量的性质知 (P_1, P_2, P_3) 可逆,

$$(P_1, P_2, P_3)^{-1} A (P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{可得 } A = (P_1, P_2, P_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} (P_1, P_2, P_3)^{-1}, \quad A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

56. 解: (1) 矩阵 A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ -3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(6-\lambda)$$

由 $|A-\lambda E| = 0$, 得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6 \dots$

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 解齐次线性方程组 $(A-2E)x = 0$, 可得方程组的一个基础解系

$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$. 则 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ (c_1, c_2 为任意常数且不同时为零) 为特征值 2 对应的特征向量;

对于 $\lambda_3 = 6$, 解齐次线性方程组 $(A-6E)x = 0$, 可得方程组的一个基础解系

$\alpha_3 = (1, -2, 3)^T$. 则 $c_3\alpha_3$ 为特征值 6 对应的特征向量.

(2) 由于 A 有三个线性无关的特征向量, 故 A 可对角化. 令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

57. 解: 显然 B 的特征值为 $-1, 2, y$; A 有特征值 -2 . A 与 B 相似, 则 A 与 B 有相同的特征值, 故 $y = -2$. 又 $(-1) + 2 + y = (-2) + x + 1 \Rightarrow x = 0$

$$A \text{ 的对应于特征值 } -1, 2, -2 \text{ 的特征向量分别为 } p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

令可逆矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3)$, 则 $P^{-1}AP = B$.

58. 解: 算得 A 的特征多项式为: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, 全不相等, 故可对角化;

$$\text{当 } \lambda_1 = 0 \text{ 时, 对应的特征向量为 } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{当 } \lambda_2 = 1 \text{ 时, 对应的特征向量为 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{当 } \lambda_3 = -1 \text{ 时, 对应的特征向量为 } \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\therefore A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}, \text{ 其中 } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix},$$

$$A^{101} = P\Lambda P^{-1} \cdot P\Lambda P^{-1} \cdots P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^{101}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

59.

解: (1) 条件①可写成矩阵形式

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ②$$

可得

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 记矩阵 $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以矩阵 Q 可逆. 因此式②可写成

$$Q^{-1}AQ = B$$

即矩阵 A 与 B 相似, 从而 A 与 B 有相同的特征值. 由矩阵 B 的特征多项式

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$$

可得矩阵 B 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$, 即 A 也有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$.

(3) 因为 A 与 B 相似, 可先将矩阵 B 对角化.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 解齐次线性方程组 $(I - B)x = 0$, 得基础解系 $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T, \xi_2 = (-2, 0, 1)^T$.

对于 $\lambda_3 = 4$, 解齐次线性方程组 $(4I - B)x = 0$, 得基础解系 $\xi_3 = (0, 1, 1)^T$.

记矩阵

$$R = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

则 $R^{-1}BR = A$, 将 $B = Q^{-1}AQ$ 代入, 得

$$R^{-1}Q^{-1}AQR = A, \text{ 即 } (QR)^{-1}A(QR) = A$$

记矩阵 $P = QR$, 上式化为 $P^{-1}AP = A$. 其中

$$\begin{aligned} P = QR = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) & \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & = (-\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3) \end{aligned}$$

$$60. \text{ 解: (1) 由已知, } A\alpha = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 2 \\ -1-b \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

得 $a = 0, b = 1$.

$$(2) |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2.$$

对于 $\lambda = 1$, 解方程 $(E - A)X = 0$, 得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以, 可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$.

61. 解: 由 $A^* \alpha = \lambda \alpha$, 得 $AA^* \alpha = \lambda A \alpha \Rightarrow A \alpha = \frac{|A|}{\lambda} \alpha$,

即 $\frac{|A|}{\lambda} \alpha$ 是 A 的特征值, α 是 A 的属于 $\frac{|A|}{\lambda} \alpha$ 的特征向量, 且 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 3a - 2$.

$$A \alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+b \\ 2+2b \\ 1+a+b \end{pmatrix} = \frac{|A|}{\lambda} \alpha = \begin{pmatrix} \frac{3a-2}{\lambda} \\ \frac{(3a-2)b}{\lambda} \\ \frac{3a-2}{\lambda} \end{pmatrix}$$

比较第 1、3 两个分量, 有 $3+b=1+a+b \Rightarrow a=2$.

比较第 1、2 两个分量, 有 $2+2b=b(3+b) \Rightarrow b^2+b-2=0$, 得 $b=-2$, $b=1$.

又由 $3+b=\frac{3a-2}{\lambda}$, 将以上 a, b 的值代入, 解得

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-2, \text{ 以及} \\ \lambda=4 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ \lambda=1 \end{cases}$$

62. 解: $A^* = |A| \cdot A^{-1}$, $|A^*| = |A|^{n-1} = (-1)^{n-1} \neq 0$, 故 A^* 可逆, 则 $\lambda \neq 0$, $A^* \alpha = \lambda \alpha \Rightarrow$

$AA^* \alpha = \lambda A \alpha \Rightarrow |A| E \alpha = \lambda A \alpha \Rightarrow -\alpha = \lambda A \alpha \Rightarrow A \alpha = -\frac{1}{\lambda} \alpha$, 则

$$\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+c=\frac{1}{\lambda}-1 \\ -b=\frac{1}{\lambda}+2 \\ c-a=-\frac{1}{\lambda}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=-3 \\ c=c \\ \lambda=1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & -1 & c \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-c & 0 & -c \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-3r_1} \begin{vmatrix} c & -1 & c \\ -3c+5 & 0 & -3c+3 \\ 1-c & 0 & -c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3c+5 & -3c+3 \\ 1-c & -c \end{vmatrix}$$

$$= c-3 = -1 \Rightarrow c = 2.$$

$\therefore \lambda = 1, a = 2, b = -3, c = 2.$

四、证明题

63. 证明：方法一： $A^2 = A \Rightarrow A^2 - A = 0 \Rightarrow A(A-E) = 0$ ，两边取行列式得：

$$|A(A-E)| = |A||A-E| = 0 \Rightarrow |A-0E| = 0 \text{ 或 } |A-E| = 0, \text{ 即 } \lambda = 0 \text{ 或 } \lambda = 1 \text{ 是 } A \text{ 的特征值；}$$

方法二：设 $Ax = \lambda x$ ，则 $A^2 = A \Rightarrow A^2x = Ax \Rightarrow \lambda^2x = \lambda x \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)x = 0$ ， $\because x \neq 0$ ，

$$\therefore \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0, \therefore \lambda = 0, \lambda = 1.$$

64. 证明： $A^* = |A| \cdot A^{-1}$ ，由已知 λ 是可逆矩阵 A 的特征值，则 $\lambda \neq 0$ ， $Ax = \lambda x$ ， $x \neq 0$ ，

两边左乘 $|A| \cdot A^{-1}$ 得： $|A| \cdot A^{-1} \cdot Ax = \lambda \cdot A^*x$ ， $\therefore \frac{|A|}{\lambda}x = A^*x$ ， $\therefore \frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的特征值。

65. 证明： A 的特征多项式为： $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$

故 A 与 E 有相同特征值，均为 $\lambda = 1$ (2重)， E 是对角阵， A 要相似于 $E \Leftrightarrow A$ 有两个线性无关的特征向量。

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得基础解系 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 故对应于 } \lambda = 1 \text{ 的特征向量为 } k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \neq 0), \text{ 即 } A$$

只有一个线性无关的特征向量，故 A 不能相似对角化。

66. 证明： A 可逆，即 A^{-1} 存在，又 $A(BA)A^{-1} = (AB)(AA^{-1}) = AB$ ，由相似矩阵定义可得： AB 与 BA 相似。

67. 证明 这一题实质上就是 $r(A) + r(A-E) = n$ 。

由 $A^2 = A$ 知 A 的特征值为 0 或 1；对应于特征值 0 的无关特征向量的个数为 $n - r(A)$ ，对应于特征值 1 的无关特征向量的个数为 $n - r(A-E)$ ，二者之和

$$n - r(A) + n - r(A-E) = 2n - [r(A) + r(A-E)] = 2n - n = n$$

说明 A 有 n 个无关的特征向量，从而可对角化。

下面再证： $r(A) + r(A-E) = n$ 。

一方面, 由 $A^2 = A$ 得 $A(A-E) = O$, 从而 $r(A) + r(A-E) \leq n$;

另一方面, 由 $E = A + E - A$ 得,

$$n = r(E) = r(A + E - A) \leq r(A) + r(E - A) = r(A) + r(A - E).$$

68. 证明 由已知, $A\xi = 0 \cdot \xi$, $A\alpha = \beta$, $A\beta = \alpha$;

$$\text{可推出 } A(\alpha + \beta) = \alpha + \beta, \quad A(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)$$

所以, A 的特征值为 $0, 1, -1$, A 可以相似对角化, 与之相似的对角阵为 $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

69. 证明 由已知 $A^2 - 2A - 3E = 0 \Rightarrow (A - 3E)(A + E) = 0$.

所以 $r(A - 3E) + r(A + E) \leq n$; 又因为

$$r(A - 3E) + r(A + E) = r(3E - A) + r(E + A) \geq r(3E - A + E + A) = r(4E) = n,$$

$$\text{故 } r(A - 3E) + r(A + E) = r(3E - A) + r(E + A) = n.$$

设 A 的特征值为 λ , 则 λ 满足 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, 得 $\lambda = 3, \lambda = -1$;

对应于特征值 3 的无关特征向量的个数为 $n - r(3E - A)$, 对应于特征值 -1 的无关特征向量

的个数为 $n - r(-E - A) = n - r(E + A)$, 二者之和

$$n - r(3E - A) + n - r(E + A) = 2n - [r(3E - A) + r(E + A)] = 2n - n = n$$

说明 A 有 n 个无关的特征向量, 从而可对角化.

70. 设 n 阶矩阵 $A \neq 0$, 而 $A^k = 0$ (k 为正整数), 证明 A 不能相似对角化.

证明 提示: 用反证法.

§ 4.3 实对称矩阵的特征值和特征向量

一、 填空

71. -5; 72. -2; 73. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$; 74. $X = (1, 0, 0)^T$; 75. 1; 76.

2, 3, $\xi_2 = k(1, -1)^T$; 77. 2, 0; 78. 10; 79. 9.

二、 单项选择

80. B; 81. D; 82. B; 83. C; 84. B; 85. C; 86. C.

三、 计算

87. 解 (1) 根据施密特正交化方法:

$$\text{令 } b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{故正交化后得: } (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$(2) \text{ 根据施密特正交化方法令 } b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{故正交化后得 } (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

88. 解 (1) 取 $\beta_1 = \alpha_1 = (0, 1, 1)^T$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1, 1, 0)^T - \frac{1}{2}(0, 1, 1)^T = (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = (1, 0, 1)^T - (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T - (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6})^T = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$$

再将向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化, 即得到正交的单位向量组:

$$\gamma_1 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T, \quad \gamma_2 = (\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6})^T, \quad \gamma_3 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$$

(2) 取 $\beta_1 = \alpha_1 = (1, -2, 2)^T$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (-1, 0, -1)^T + \frac{3}{9}(1, -2, 2)^T = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})^T$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 \\ &= (5, -3, -7)^T + \frac{3}{9}(1, -2, 2)^T - (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})^T = (6, -3, -6)^T \end{aligned}$$

再将向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化, 即得到交的单位向量组:

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T, \quad \gamma_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T, \quad \gamma_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T.$$

89. 解: (1) 第一个行向量非单位向量, 故不是正交阵.

(2) 该方阵每一个行向量均是单位向量, 且两两正交, 故为正交阵.

$$90. \text{ 解: (1) } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 9$.

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程 $Ax = 0$, 由 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得基础解系 $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

故 $k_1 P_1 (k_1 \neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征值向量.

当 $\lambda_2 = -1$ 时, 解方程 $(A + E)x = 0$, 由 $A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得基础解系 $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 故 $k_2 P_2 (k_2 \neq 0)$ 是对应于 $\lambda_2 = -1$ 的全部特征值向量

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程 $(A - 9E)x = 0$, 得基础解系 $P_3 = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 1\right)^T$

故 $k_3 P_3 (k_3 \neq 0)$ 是对应于 $\lambda_3 = 9$ 的全部特征值向量.

容易验证, P_1, P_2, P_3 两两正交.

$$(3) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_1^2 - \lambda & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 - \lambda & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n - \lambda^{n-1}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \\ = \lambda^{n-1}[\lambda - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)]$$

$$\therefore \lambda_1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$$

当 $\lambda_1 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ 时,

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -a_2^2 - a_3^2 - \cdots - a_n^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & -a_1^2 - a_3^2 - \cdots - a_n^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & -a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_{n-1}^2 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & a_n & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 取 } \mathbf{x}_n \text{ 为自由未知量, 并令 } x_n = a_n,$$

设 $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_{n-1} = a_{n-1}$, 故基础解系为 $P_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$ 时, $(A - 0 \cdot E) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$

可得基础解系 $P_2 = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -a_2 \\ 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, P_n = \begin{pmatrix} -a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}$

综上所述可知原矩阵的特征向量为 $(P_1, P_2, \dots, P_n) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$

91. 解: (1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4.$

当 $\lambda_1 = -2$ 时, 由

$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ 解得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$ 单位化得 $P_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 由

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ 解得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$ 单位化得 $P_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_3 = 4$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{解得} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{单位化得} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{得正交阵 } (P_1, P_2, P_3) = P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10), \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{解得} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

此二个向量正交, 单位化后, 得两个单位正交的特征向量 $P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{当 } \lambda_3 = 10 \text{ 时, 由 } \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{解得} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{单位化 } P_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \text{得正交阵 } (P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$

$$\text{当 } \lambda_1 = 1 \text{ 时, } A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 对应的特征向量为 } p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{当 } \lambda_2 = \lambda_3 = 3 \text{ 时, } A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{对应的特征向量为 } p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{两两正交, 单位化得正交阵 } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 且 } P^T A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \text{ 由于 } A \text{ 的特征多项式 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda + 2 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2 (\lambda - 6)$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = -3$ (二重特征值), $\lambda_3 = 6$ 。

$$\text{当 } \lambda_1 = -3 \text{ 时, 由 } (\lambda_1 I - A)X = O, \text{ 即: } \begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 得基础解系为}$$

$\alpha_1 = [-1, 2, 0]^T, \alpha_2 = [-1, 0, 1]^T$, 故属于特征值 $\lambda_1 = -3$ 的所有特征向量为 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2$, k_1, k_2 不全为零的任意常数。

$$\text{当 } \lambda_3 = 6 \text{ 时, 由 } (\lambda_3 I - A)X = O, \text{ 即: } \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 得基础解系为}$$

$\alpha_3 = [2, 1, 2]^T$, 故属于特征值 $\lambda_2 = 6$ 的所有特征向量为 $k_3 \alpha_3$, k_3 为非零的任意常数。

将 α_1, α_2 正交化可得:

$$\beta_1 = \alpha_1 = [-1, 2, 0]^T, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = \left[-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right]^T.$$

再将其单位化得: $\eta_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0 \right]^T$, $\eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \left[-\frac{4\sqrt{5}}{15}, -\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right]^T$

将 α_3 单位化得: $\eta_3 = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]^T$ 。

则 η_1, η_2, η_3 是 A 的一组单位正交的特征向量, 令 $T = [\eta_1, \eta_2, \eta_3] = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

则 T 是一个正交矩阵, 且 $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$ 。

92. 解 (1) $\because A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 是实对称矩阵.

故可找到正交相似变换矩阵 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \Lambda$, 从而 $A = P\Lambda P^{-1}$, $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$

因此 $\varphi(A) = A^{10} - 5A^9 = P\Lambda^{10}P^{-1} - 5P\Lambda^9P^{-1}$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix} P^{-1} - P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 同(1)求得正交相似变换矩阵

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \text{ 使得 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \Lambda, A = P\Lambda P^{-1}$$

$$\varphi(A) = A^{10} - 6A^9 + 5A^8 = A^8(A^2 - 6A + 5E) = A^8(A - E)(A - 5E)$$

$$= P\Lambda^8 P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

93. 解: (1) 由特征方程 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(2 - \lambda) = 0$

得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, 解齐次方程 $(A + E)x = 0$

$$A + E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 基础解系: } \xi_1 = (-1 \ 1 \ 0)^T, \xi_2 = (-1 \ 0 \ 1)^T$$

$$\text{正交化: } \alpha_1 = \xi_1, \alpha_2 = \xi_2 - \frac{[\xi_2, \alpha_1]}{[\alpha_1, \alpha_1]} \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{规范化: } p_1 = \frac{1}{\|\xi_1\|} \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \frac{1}{\|\xi_2\|} \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3 = 2$, 解齐次方程 $(A - 2E)x = 0$

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{基础解系 } \xi_3 = (1 \ 1 \ 1)^T, \text{ 只需单位化, } p_3 = \frac{1}{\|\xi_3\|} \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{记 } P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, P \text{ 即为所求的正交阵, 使 } P^{-1}AP = \Lambda,$$

$$\text{其中 } \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 由 $P^{-1}AP = \Lambda$ 知 $A = P\Lambda P^{-1}$, 且当 k 为正整数时

$$A^k = \overbrace{AA \cdots A}^{k\text{个}} = \overbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) \cdots (P\Lambda P^{-1})}^{k\text{项}} = P\Lambda^k P^{-1} \text{ 所以由已知条件知道:}$$

$$\begin{aligned} f(A) &= A^3 + 2A^2 + 3E = P\Lambda^3 P^{-1} + 2P\Lambda^2 P^{-1} + 3PP^{-1} \\ &= P(\Lambda^3 + 2\Lambda^2 + 3E)P^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \Lambda^3 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{bmatrix} (-1)^3 & & \\ & (-1)^3 & \\ & & 2^3 \end{bmatrix},$$

$$2\Lambda^2 = 2 \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2(-1)^2 & & \\ & 2(-1)^2 & \\ & & 2 \times 2^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{从而 } \Lambda^3 + 2\Lambda^2 + 3E = \begin{bmatrix} f(-1) & & \\ & f(-1) & \\ & & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 19 \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } f(A) = P(\Lambda^3 + 2\Lambda^2 + 3E)P^{-1} = P \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 19 \end{bmatrix} P^T, \text{ 其中}$$

$$P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

由上小题结论可以知道, $f(A)$ 与 $f(\Lambda)$ 相似, 故 $f(\Lambda)$ 的对角元 4, 4, 19 就是 $f(A)$ 的全部特征值.

94. 解: 提示, 解以 α_1 为系数矩阵的齐次线性方程组.

95. 解: 利用对称矩阵的性质, 与 α_1 正交的非零向量必是对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ 的特征向量,

解方程组 $\alpha_1^T x = 0$ 得基础解系

$$x_1 = -x_2 - x_3, \text{ 取 } \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix} \text{ (} \mu \text{ 是待定参数) 得 } \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1-\mu \\ 1 \\ \mu \end{bmatrix},$$

$$\text{令 } \alpha_2^T \alpha_3 = 0 \Rightarrow \mu = -2$$

这样就得正交的基础解系，也就是对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ 的特征向量

$$\text{将它们单位化，拼成矩阵即为所求的正交矩阵 } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\text{此时 } P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix} = \Lambda, \quad A = P\Lambda P^T, \quad A^n = P\Lambda^n P^T.$$

96. 解：(1) 因 A 为实对称矩阵，且 λ_1 与 λ_2, λ_3 不等，所以 λ_2 的特征向量必与 a_1 正交。

设特征值 λ_2 所对应的特征向量为 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ，则有 $a_1^T x = 0$ ，即 $x_2 + x_3 = 0$ ，求得该方

程组的基础解系为 $a_2 = (1, 0, 0)^T, a_3 = (0, 1, -1)^T$

a_2, a_3 即为 A 的属于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的两个线性无关的特征向量，显然 a_2, a_3 线性无关。

故将 a_1, a_2, a_3 单位化，得

$$\eta_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \quad \eta_2 = (1, 0, 0)^T, \quad \eta_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$

令 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ，则 Q 为正交阵，且有

$$A = Q\Lambda Q^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 由 $A = Q\Lambda Q^T$ 得

$$B = A^3 - 5A^2 = Q\Lambda^3 Q^T - 5Q\Lambda^2 Q^T = Q(\Lambda^3 - 5\Lambda^2)Q^T,$$

$$\text{而 } \Lambda^3 - 5\Lambda^2 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & -4 & \\ & & -4 \end{pmatrix}, \text{ 即为 } B \text{ 的相似对角阵.}$$

-6, -4, -4 即为 B 的特征值。

(3) 因为 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1$, 所以 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$, 即 $1, -1, -1, A^* - 5E$ 的特征值为

$-4, -6, -6$, 故 $|A^* - 5E| = (-4)(-6)(-6) = -144$.

97. 解: 由定理知 p_2, p_3 与 p_1 正交, 设 $p_2, p_3 \subset p = (x \ y \ z)^T$, 则 $x + y + z = 0$,

解得基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以可取 $p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$P = (p_1 \ p_2 \ p_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, A = P \Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

98. 解: 设 A 的特征值为 λ , 则 $B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = (\lambda^5 - 4\lambda^3 + 1)\alpha_1$

因此 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 同时 $B = A^5 - 4A^3 + E$ 的特征值为 $\lambda^5 - 4\lambda^3 + 1$, 所以 B 的三个特征值为 $-2, 1, 1$; 又因为 A 为实对称矩阵, 所以 B 也是实对称矩阵, 故 B 正交相似

于对角阵, 即存在正交矩阵 P , 使得 $P^T B P = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = P \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^T$

设 A 关于特征值 1 的特征向量为 $\beta = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $\alpha_1^T \beta = 0$, 即

$$(1, -1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ 得基础解系 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 正交化, 得 } \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将 $\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2$ 单位化, 可组成正交矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$$B = P \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

99. 解: 略.

100. 解: (1) x, Ax, A^2x 线性无关, 则 $P = (x, Ax, A^2x)$ 可逆, $AP = PB$

$$AP = A(x \ Ax \ A^2x) = (Ax \ A^2x \ A^3x) = (Ax \ A^2x \ 3Ax - 2A^2x)$$

$$= \begin{pmatrix} x & Ax & A^2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = PB, \quad \therefore B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

(2) $A = PBP^{-1}$, 则 A 与 B 相似, B 的特征多项式为

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+3)(\lambda-1) = 0$$

故 A 与 B 有相同特征值为 $\lambda = 0, -3, 1$, 则 $A + E$ 的特征值为 $\lambda = 1, -2, 2$, $\therefore |A + E| = -4$.

101. 解: (1) A 的各行元素之和为 3, 则 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\alpha_1 = 0 \cdot \alpha_1$, $A\alpha_2 = 0 \cdot \alpha_2$,

故 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

对应于 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($k_1 \neq 0$),

对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 的全部特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (k_2, k_3 不全为 0);

(2) 对 α_1, α_2 正交化: $\eta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)} \eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

再单位化得: $q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\therefore Q = (q_1 \quad q_2 \quad q_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

四、证明题

102. 证明: 因为 A, B 是 n 阶正交阵, 故 $A^{-1} = A^T$, $B^{-1} = B^T$

$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^{-1} A^{-1} AB = E$, 故 AB 也是正交阵.

103. 证明: 把正交关系看成齐次方程组. 由题意 β_1, β_2 都是方程组

$\alpha_1^T x = 0, \alpha_2^T x = 0, \dots, \alpha_{n-1}^T x = 0$ 的解, 其系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T \end{bmatrix}_{(n-1) \times n} \quad \text{的秩为 } r(A) = n-1, \text{ 说明 } Ax = 0 \text{ 只有一个线性无关的解.}$$

104. 证明: 提示: 只需证 $H^T H = E$ 即可.

105. 证明: 设 A 的特征值为 λ , 属于 λ 的特征向量为 α , 即 $A\alpha = \lambda\alpha$.

$$\text{则 } (A^3 + 3A^2 + 6A + 4E)\alpha = (\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda + 4)\alpha = 0,$$

$$\text{有 } \lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0, \text{ 即 } (\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0,$$

因 A 为实对称阵, 特征值均为实数, 所以 $\lambda = -1$, 即 A 的特征值均为 -1.

$$\text{故存在可逆矩阵 } P, \text{ 使得 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } A = P \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = -E.$$