

第六章 假设检验

第一节 假设检验基础知识

第二节 总体均值的检验

第三节 总体比率的检验

第四节 总体方差的检验

引例

某公司生产化妆品，需要严格控制装瓶重量。标准规格为每瓶250克，标准差为1克，企业的质检部门每日对此进行抽样检验。某日从生产线上随机抽取16瓶测重，获得下表数据（单位：克）：

248.1	248.3	248.3	248.4	248.5	248.6	248.8	249.3
249.3	249.5	249.6	249.8	250.1	250.3	250.6	251.3

现在需要通过样本信息确认：当日所生产的全部化妆品装瓶重量是否符合规定的标准。



引例

依据参数估计的方法

计算得到 $\bar{x} = 249.3$ ，同时有 $\sigma = 1$ ， $Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$ ， $n = 16$ 则化妆品重量总体均值的95%估计区间为：

$$\begin{aligned}\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 249.3 \pm 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{16}} \\ &= 249.3 \pm 0.49\end{aligned}$$

从估计结果看，总体均值在248.81克到249.79克之间，低于规定的250克，因此可以推断：当日生产线上所生产的全部化妆品的重量不符合规格要求，做出这一推断的把握程度为95%。



引例

假设检验

利用样本数据来确定是否拒绝关于总体的某种解释。多数情况下假设检验是对总体参数值的解释，有时则不涉及具体的总体参数，如对总体是否服从正态分布的检验，或对两个变量是否相互独立的检验。

原假设

进行假设检验时，首先对总体参数提出的一个尝试性的假设，记为 H_0 。

备择假设

所定义的与原假设内容完全相反的假设，记为 H_1 。



第一节 假设检验基础知识

- 一、原假设和备择假设的提出
- 二、假设检验的基本原理
- 三、假设检验的两种错误及概率
- 四、拒绝原假设的规则
- 五、假设检验的基本步骤
- 六、对假设检验结论的正确解读：
统计显著与实际显著

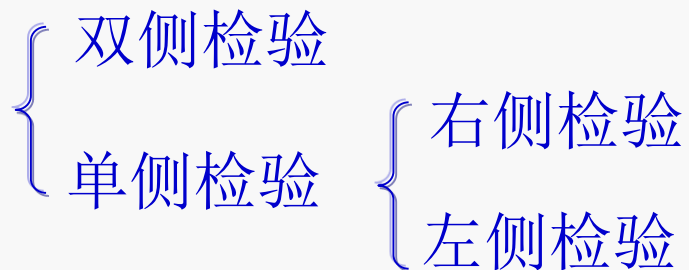


一、原假设和备择假设的提出

➤ 正确提出假设的基本规则

- 以看到的样本现象的反现象为原假设
- 在所提出的假设中不要出现样本字样或信息
- 等号都在（或包含在）原假设一方

➤ 总体参数的检验的分类



一、原假设和备择假设的提出

以检验一个总体的均值为例，三种检验的一般假设形式如下：

双侧检验： $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$

左侧检验： $H_0 : \mu \geq \mu_0$ 或 $H_0 : \mu = \mu_0$
 $H_1 : \mu < \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$

右侧检验： $H_0 : \mu \leq \mu_0$ 或 $H_0 : \mu = \mu_0$
 $H_1 : \mu > \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$



二、假设检验的基本原理

小概率原理

如果对总体的某种假设是真实的，那么不利于或不支持这一假设的事件A（小概率事件）在一次试验中几乎不可能发生；如果在一次试验中A竟然发生了，就有理由怀疑该假设的真实性，拒绝这一假设。

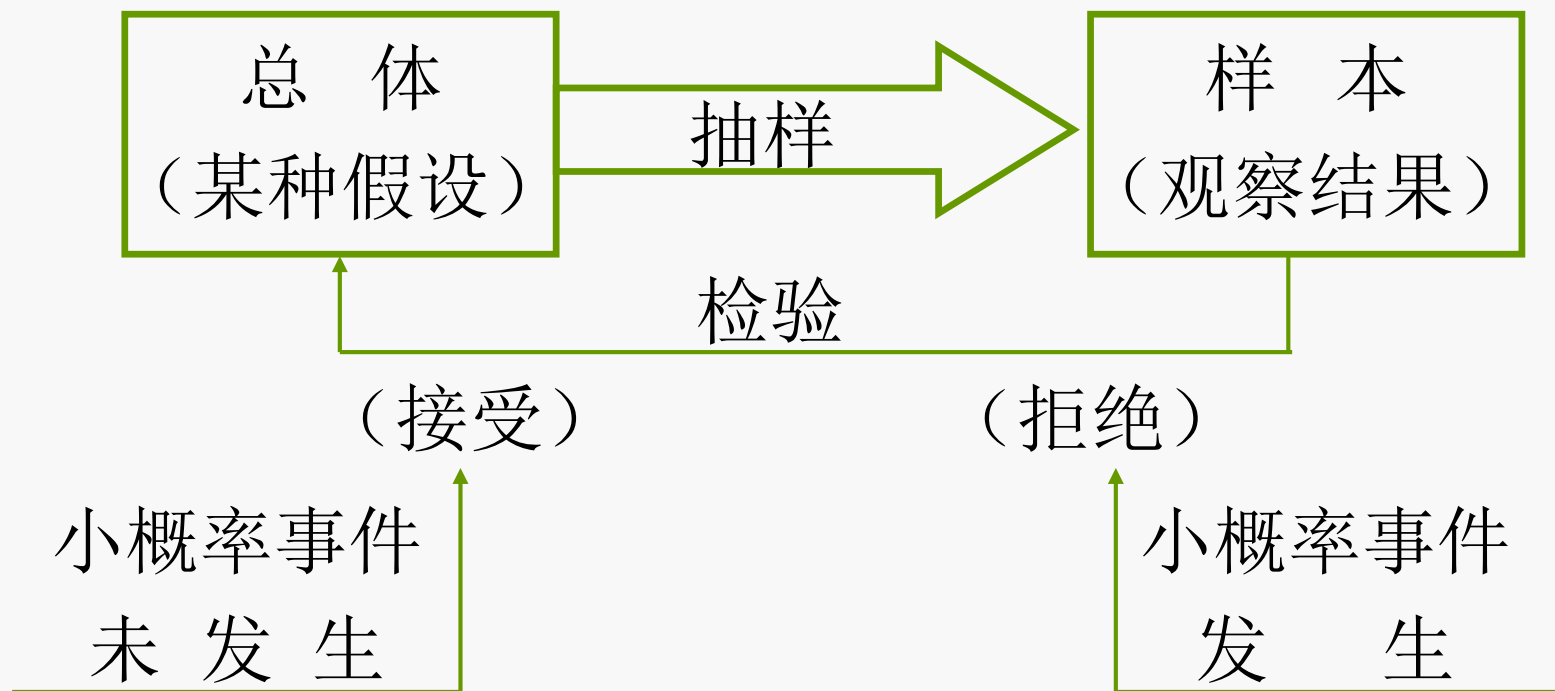
理解小概率原理的三个要点：

- 小概率是一个相对的概念
- 小概率原理强调仅做一次试验
- 小概率原理强调“几乎”二字



二、假设检验的基本原理

假设检验的基本思想：运用具有概率性质的反证法



二、假设检验的基本原理

进行假设检验应当明确和注意的问题：

- 进行假设检验，是希望拒绝原假设、接受备择假设。因此，当假设检验的结果是拒绝原假设时，也可以说是“通过了检验”。相应地，如果看到对某项假设检验的描述是“未通过检验”，那就意味原假设没有被拒绝。
- 当原假设无法拒绝时，建议不使用“接受原假设”的说法，而使用“不能拒绝原假设”这样的表述。
- 无论是拒绝原假设或不能拒绝原假设，都有可能出现判断错误，因此，需要尽量控制出错的概率。



三、假设检验的两类错误及概率

第一类错误

指拒绝了一个本来是真实的原假设，又称为“弃真”错误或“拒真”错误

犯第一类错误的概率为假设检验的显著性水平，即

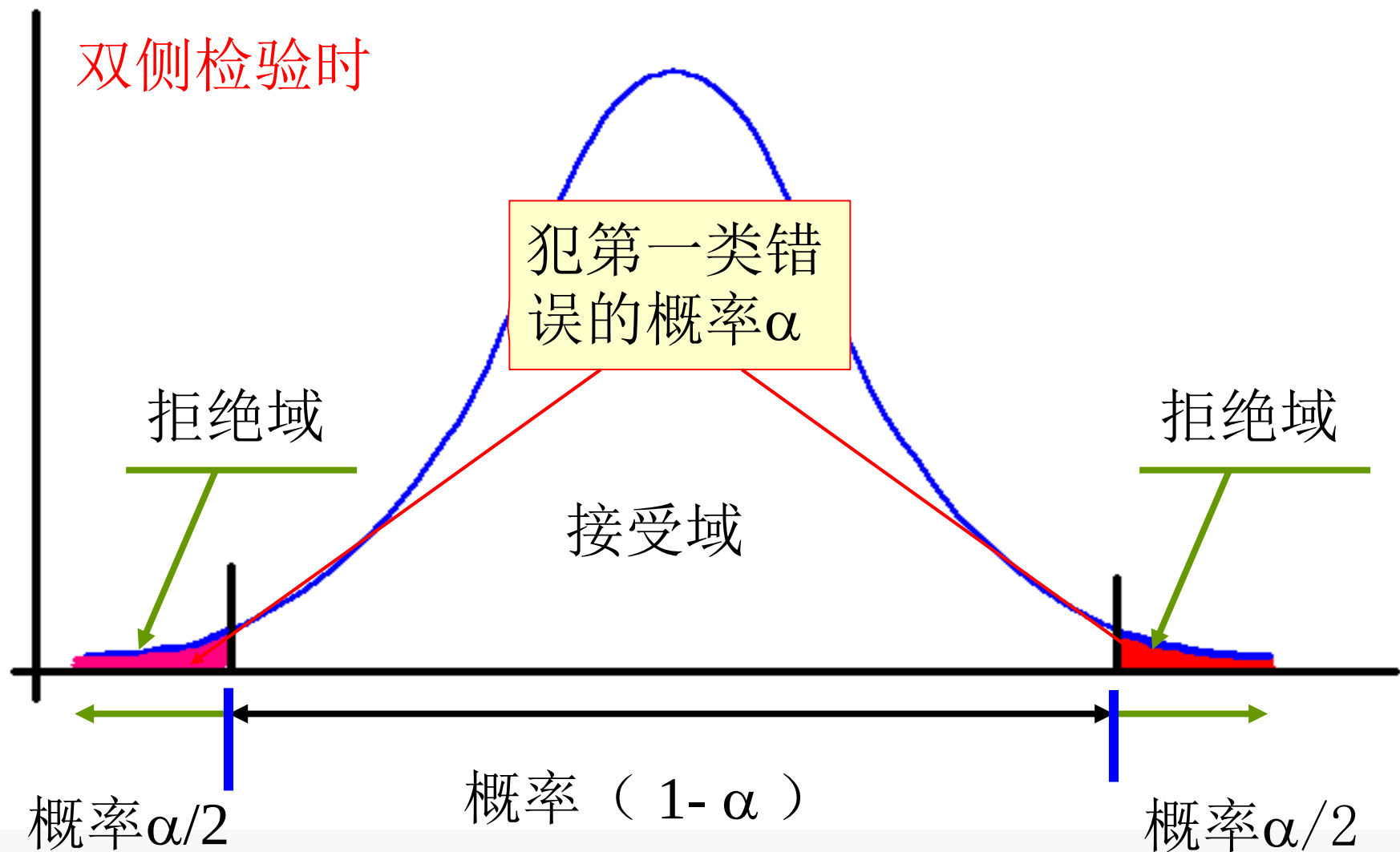
$$P(\text{拒绝}H_0 / H_0\text{为真}) = \alpha$$

关于显著性水平 α 的说明：

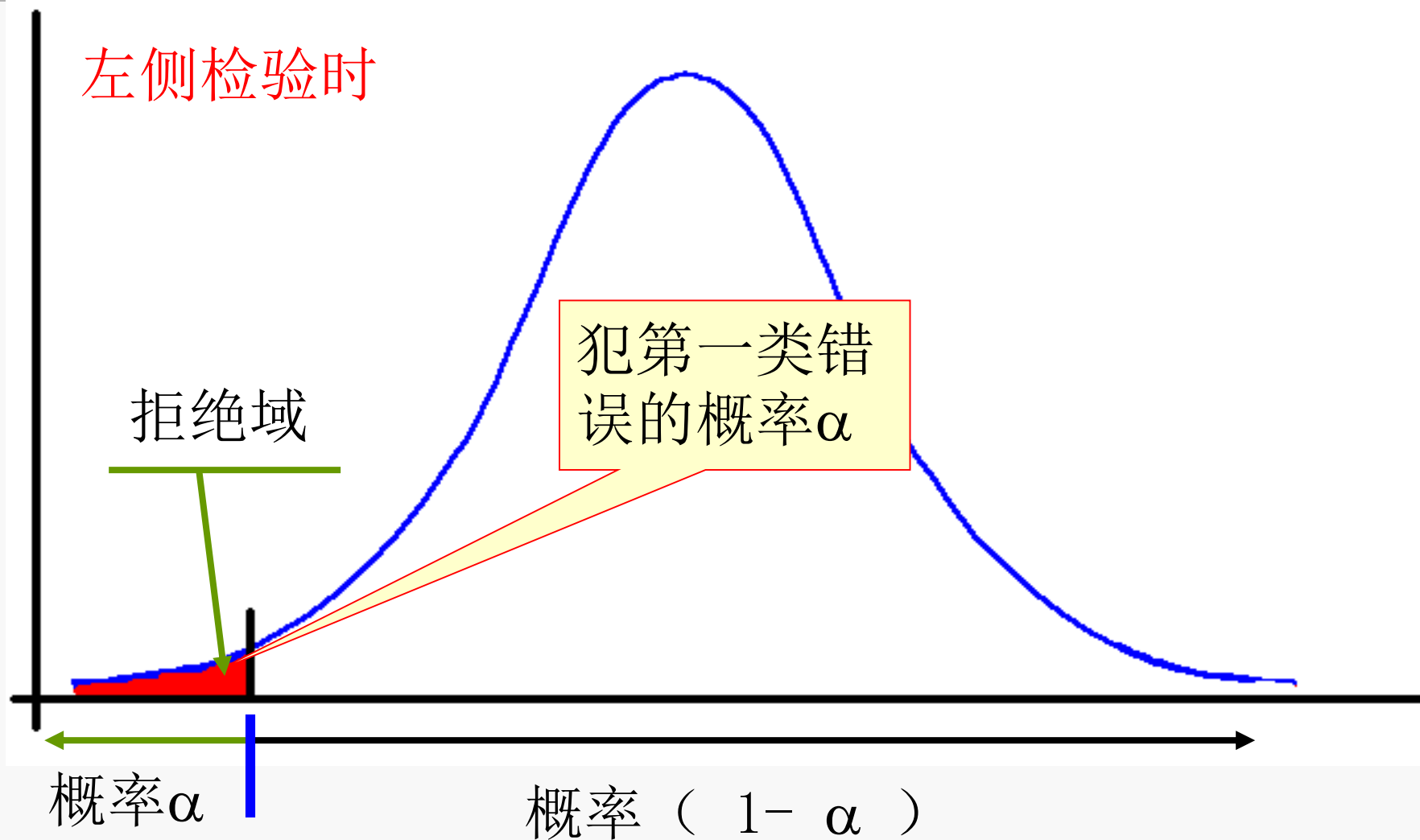
- 是假设的犯第一类错误的概率上限，而不是实际犯第一类错误的可能；
- 通常是一个较小的概率，常用的为0.05，有时会更小一点为0.01，最大一般不会超过0.1。



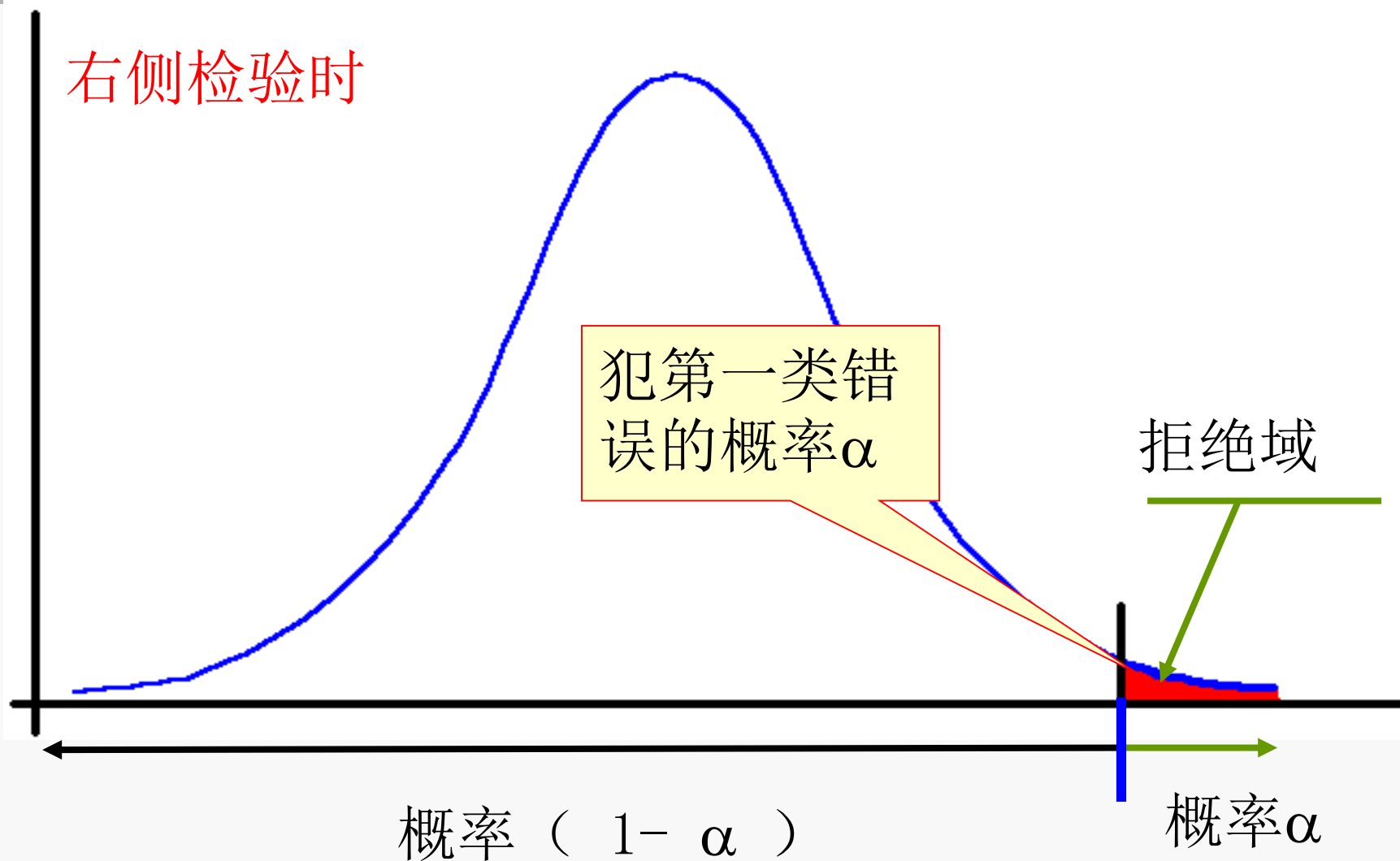
三、假设检验的两类错误及概率



三、假设检验的两类错误及概率



三、假设检验的两类错误及概率



三、假设检验的两类错误及概率

第二类错误 指接受了一个本来是不真实的原假设，又称为“采伪”错误或“取伪”错误

记犯第二类错误的概率为 β ，即 $P(\text{接受} H_0 / H_0 \text{为不真}) = \beta$

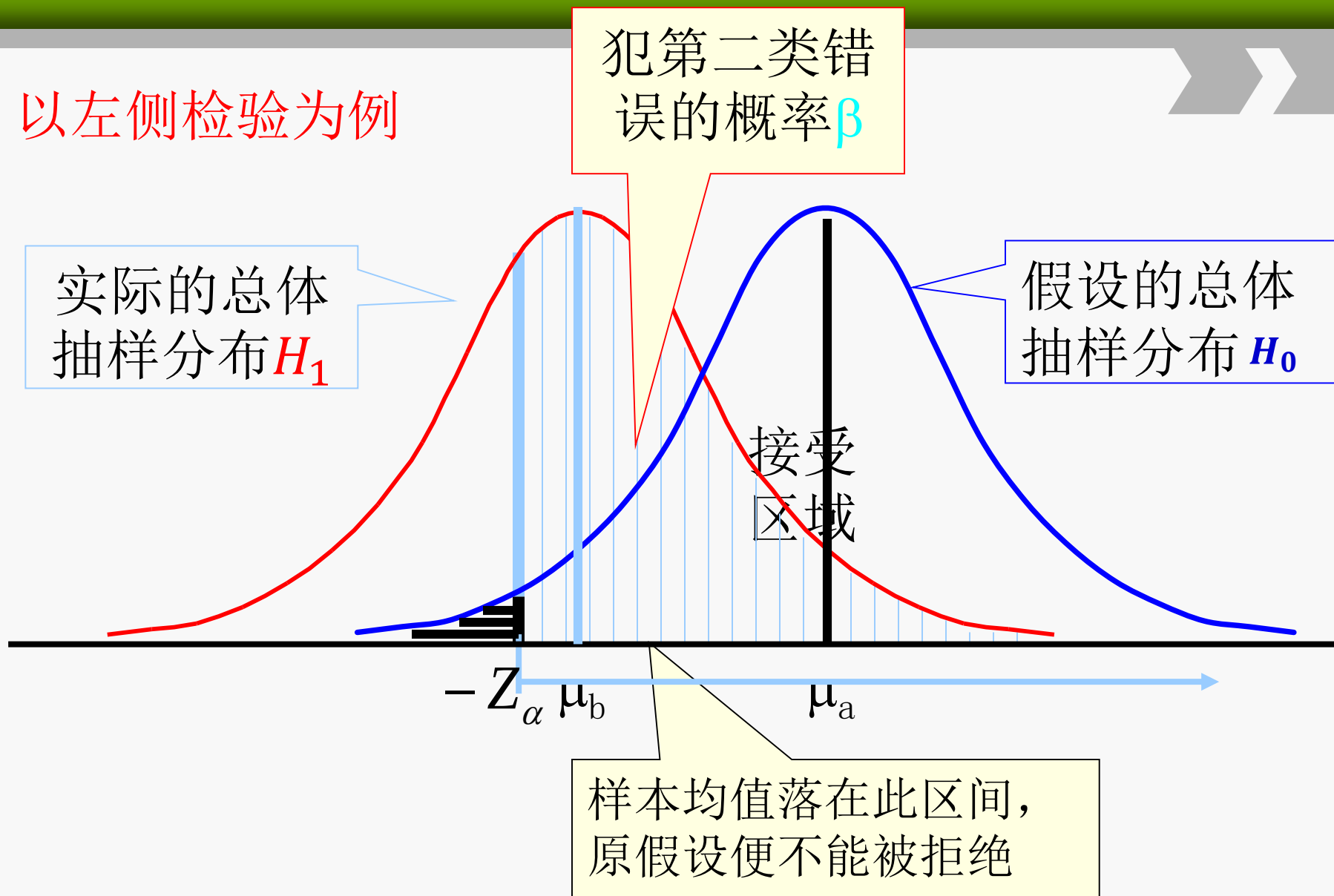
关于 β 的说明：

- 通常情况下 β 是无法确定的；
- 其他条件不变的情况下， β 与 α 成反向变化，二者不可能同时增减。
- 真实的总体情况越接近于原假设， β 就越大。



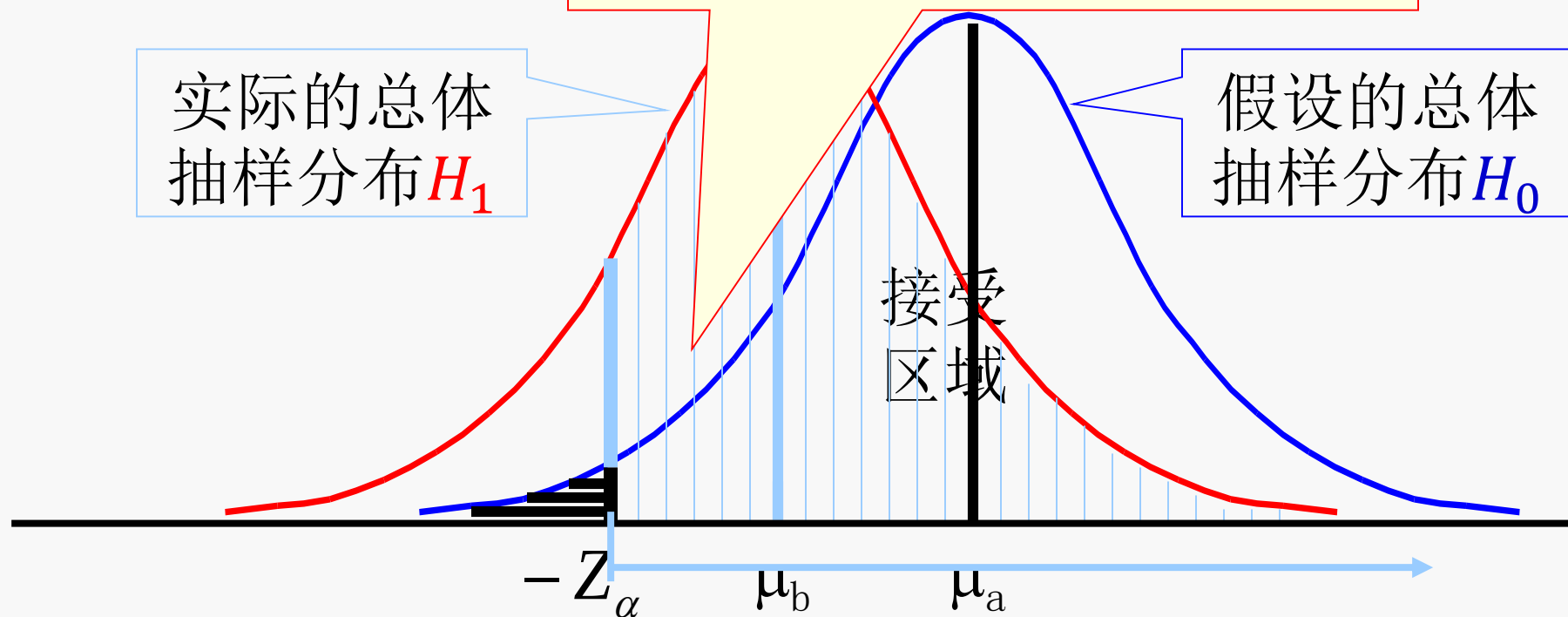
三、假设检验的两类错误及概率

以左侧检验为例



三、假设检验的两类错误及概率

实际的总体抽样分布越接近假设的总体抽样分布，犯第二类错误的可能性就越大

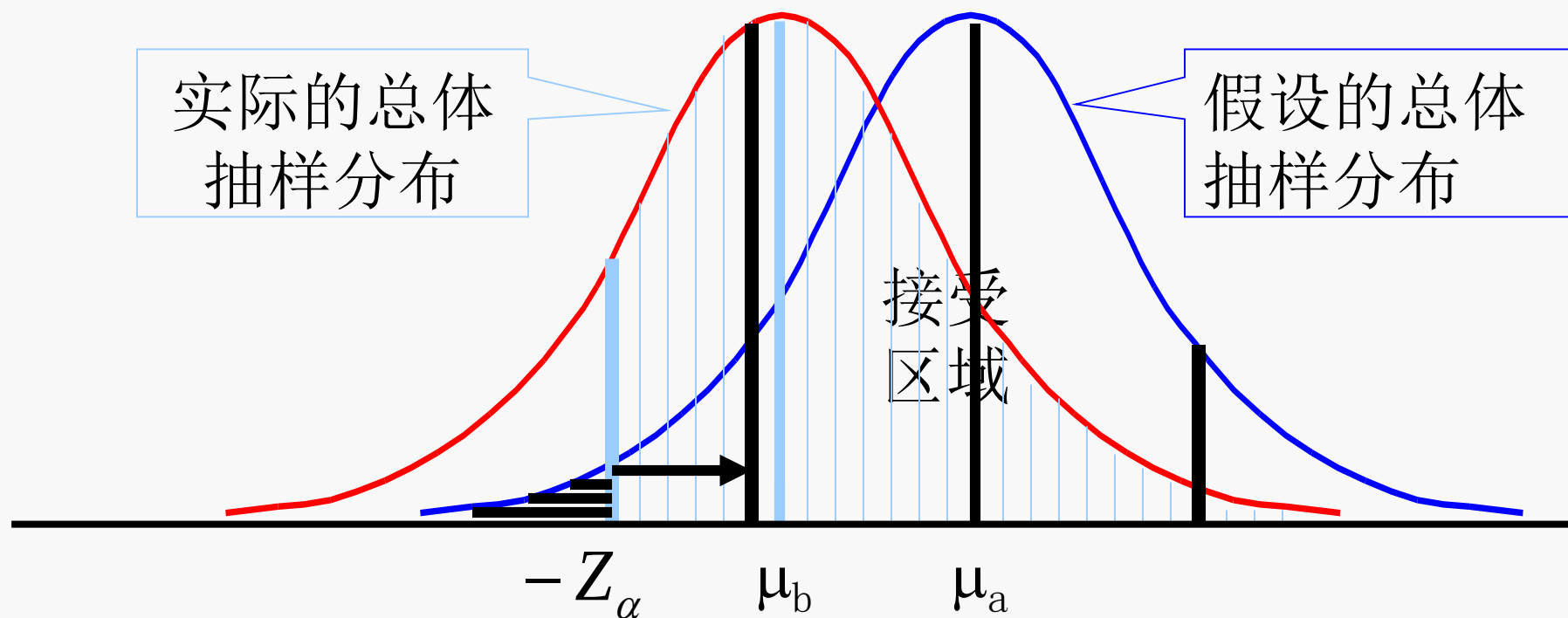


以左侧检验为例



三、假设检验的两类错误及概率

以左侧检验为例

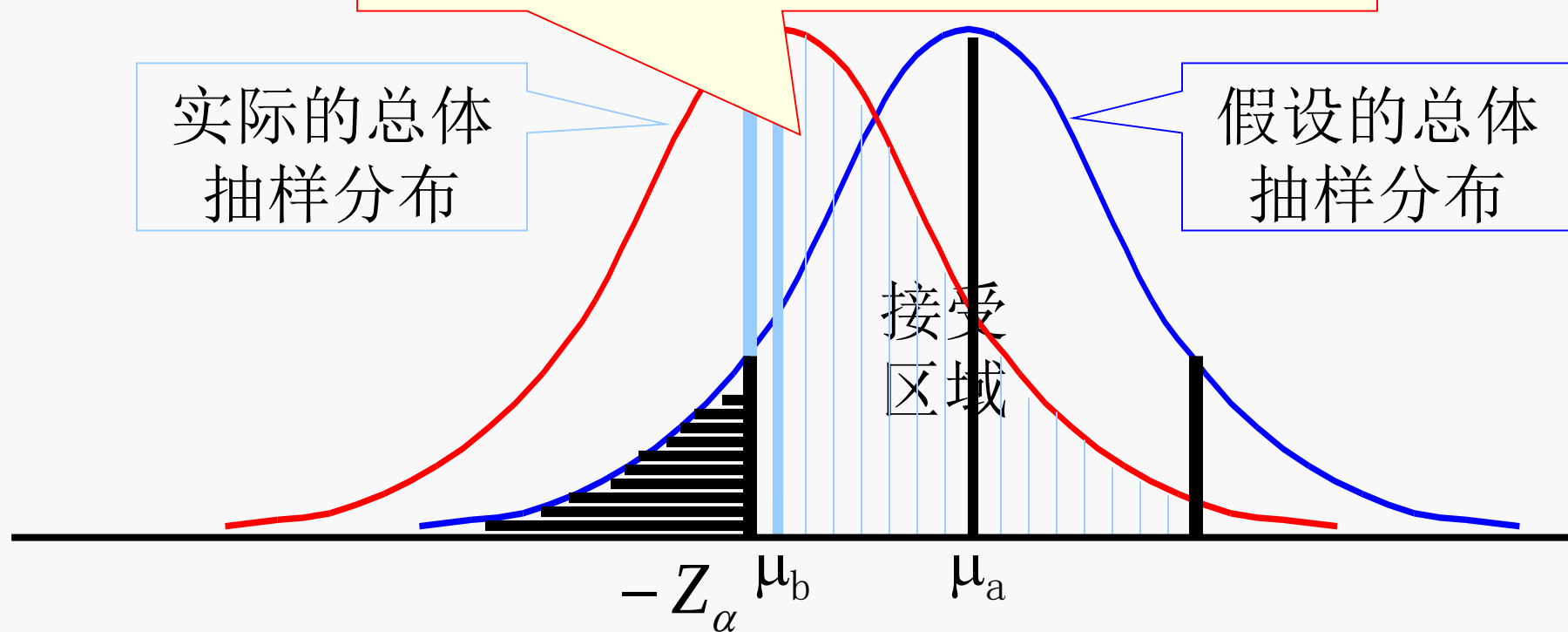


以左侧检验为例



三、假设检验的两类错误及概率

在样本容量一定的情况下，增大犯第一类错误的概率，则可以缩小犯第二类错误的概率，但不可能两个概率同时减少。

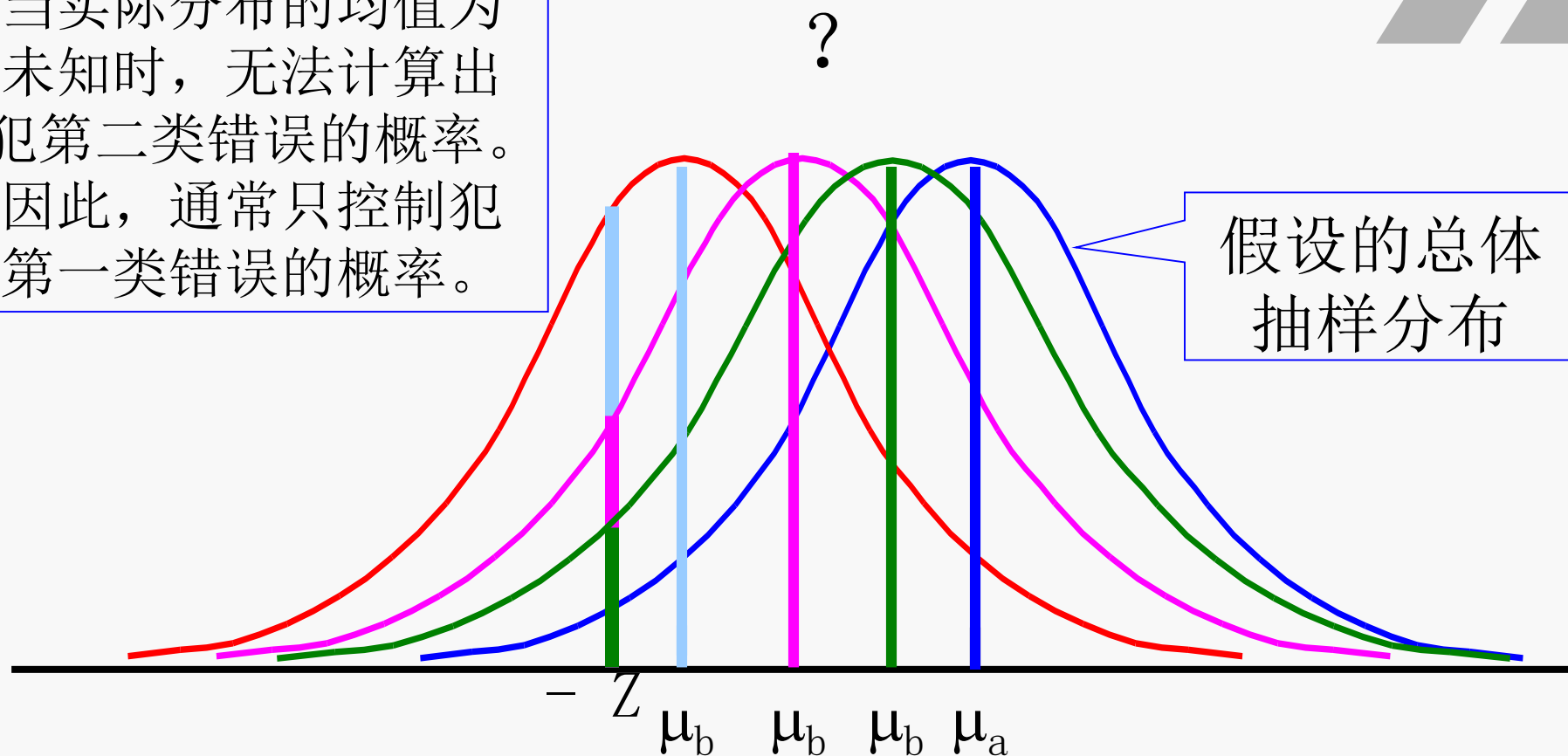


以左侧检验为例



三、假设检验的两类错误及概率

当实际分布的均值为未知时，无法计算出犯第二类错误的概率。因此，通常只控制犯第一类错误的概率。



以左侧检验为例



三、假设检验的两类错误及概率

两类错误总结

结论	总体实际情况	
	H_0 为真	H_1 为真
接受 H_0	结论正确	第二类错误 (概率为 β)
拒绝 H_0	第一类错误 (概率为 α)	结论正确



三、假设检验的两类错误及概率

检验功效

指原假设为假时，拒绝原假设、得出正确结论的概率，即 $1-\beta$ 。其中， β 表示“原假设是错的，但没有被拒绝的概率”。

β 的计算步骤（以引例为例）：

对原假设成立和备择假设成立做双重设定，即

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 250 ; \quad H_1 : \mu = \mu_1 = 249.3$$

如果做左侧检验，设 $\alpha = 0.05$ ，则通过下列步骤即可计算得出 β 。



三、假设检验的两类错误及概率

β 的计算步骤（以引例为例）：

1. 查出 $\alpha = 0.05$ 时分割点的相对位置为 -1.645。
2. 计算原假设成立，即均值为 250 克、标准误差为 0.25 克的情况下，相对位置为 -1.645 的样本均值：

$$\bar{x} = Z_0 \sigma_{\bar{x}} + \mu_0 = -1.645 \times 0.25 + 250 = 249.59 \text{ (克)}$$

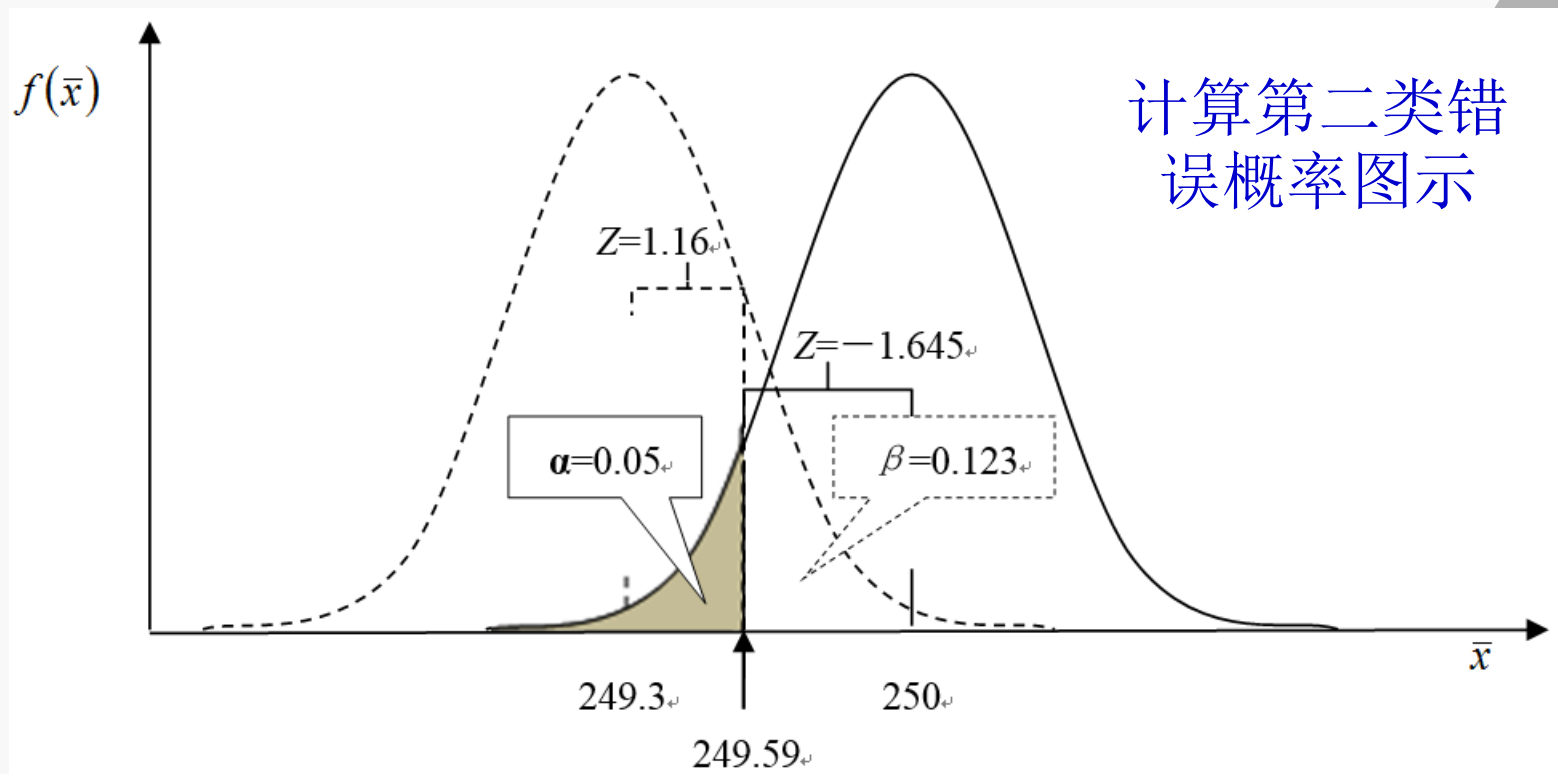
3. 计算备择假设成立且总体均值为 249.3 克、标准误差为 0.25 克的情况下，样本均值 249.59 克所处的相对位置：

$$Z_1 = \frac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{249.59 - 249.3}{0.25} = 1.16$$

4. 使用正态概率表或统计软件，得到 $Z=1.16$ 时的尾概率为 0.123，这就是犯第二类错误的概率 β 。



三、假设检验的两类错误及概率



则检验功效为 $1-0.123=0.877$ ，即在现有条件下做左侧检验，拒绝一个错误原假设的概率为87.7%。如果要提高检验功效，就需要改变现有条件，通常的作法是增大样本容量。



四、拒绝原假设的规则

1. 依据检验统计量的判断规则

- 左侧检验，检验统计量小于临界值时，应拒绝原假设；
- 右侧检验，检验统计量大于临界值时，应拒绝原假设；
- 双侧检验有两个临界值，检验统计量小于左侧临界值或大于右侧临界值时，均要拒绝原假设。

2. 依据 p -值的判断规则

- 对于单侧检验， p -值小于等于 α 时，拒绝原假设；
- 对于双侧检验， p -值小于等于 $\alpha/2$ 时，拒绝原假设。



五、假设检验的基本步骤

手工计算：

1. 提出原假设 H_0 和备择假设 H_1 ；
2. 根据检验对象及条件确定检验统计量；
3. 设定显著性水平 α ；
4. 确定临界值和拒绝原假设的规则；
5. 计算检验统计量，并判断是否拒绝原假设。

使用SPSS软件计算：

1. 提出原假设 H_0 和备择假设 H_1 ；
2. 准备数据；
3. 进行菜单操作；
4. 根据输出的 p -值，判断是否拒绝原假设。



六、对假设检验结论的正确解读：统计显著与实际显著

- **统计显著**，是依据假设检验规则拒绝原假设、接受备择假设，从而证明样本所来自的总体与待检验的总体存在显著差异。当检验结论是不能拒绝原假设时，也就是统计不显著或不具统计显著意义。
- **实际显著**，就是统计显著的结论在实际工作中也有意义。
- 统计显著的检验结论不一定都具有实际显著意义。一般说来，检验统计量与临界值差距越大，统计显著结论具有实际显著意义的可能性也就越大。



第二节 总体均值的检验

一、一个总体均值的检验

二、两个总体均值差的检验



一、一个总体均值的检验

(一) 大样本或正态总体小样本、总体标准差已知

根据中心极限定理，大样本或正态总体小样本情况下，样本均值的抽样分布服从或近似服从正态分布。在总体标准差 σ 已知的情况下，检验统计量为 Z ：

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

服从标准正态分布。



一、一个总体均值的检验

【例6.1】 引例中，某公司生产化妆品过程中，需要严格控制装瓶重量。标准规格为每瓶250克，标准差为1克，企业的质检部门每日对此进行抽样检验。某日从生产线上随机抽取16瓶测重，样本均值为249.3克。已知该生产线化妆品总体的装瓶重量服从正态分布。试以0.05的显著性水平检验：当日所生产的全部化妆品装瓶重量是否符合规定的标准。



一、一个总体均值的检验

解：提出假设： $H_0 : \mu = 250$ ； $H_1 : \mu \neq 250$

查表确定临界值： $Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$

计算检验统计量的值：

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{249.3 - 250}{1/\sqrt{16}} = -2.8 < -Z_{0.025} = -1.96$$

故拒绝原假设、接受备择假设，可以推断当日全部产品装瓶重量的总体均值与250克差异显著，不符合规定的标准。



一、一个总体均值的检验

SPSS操作步骤:

- 打开数据，选择检验方法:

Analyze→Compare Means→One Sample T Test

- 设置变量: “weight” →Test Variable(s)

- 设置检验值: Test Value: 250

- 设置检验置信度:

Options→Confidence interval→Continue→OK



一、一个总体均值的检验

输出结果：

One-Sample Test

	Test Value = 250					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
瓶装重量	-2.969	15	.010	-.7000	-1.203	-.197

即可以据此拒绝原假设、接受备择假设，认为当天生产的全部产品平均装瓶重量与250克有显著差异，不符合规定的标准。



一、一个总体均值的检验

左侧检验：

因样本均值249.3克小于待检验的250克，也可以做左侧检验。提出的假设为：

$$H_0 : \mu = 250; \quad H_1 : \mu < 250$$

因为检验统计量-2.8，小于临界值此时的临界值-1.645，因此要拒绝原假设、接受备择假设，即检验结论是认为当日生产的全部产品的平均重量不符合规定的标准。



一、一个总体均值的检验

注意：

- 上述双侧检验和左侧检验使用的显著性水平均为0.05，但临界值有所不同，因此拒绝原假设的机率也不相同。
- 当检验统计量小于-1.645但大于等于-1.96时，进行双侧检验是不能拒绝原假设的，但做左侧检验时就要拒绝原假设。这表明，其他条件相同的情况下，单侧检验更容易拒绝原假设。



一、一个总体均值的检验

(二) 大样本或正态总体小样本、总体标准差未知

在总体标准差 σ 未知的情况下，需要用样本标准差 s 来估计 σ 。这时对样本均值所做的标准化变换结果不再服从标准正态分布，而是服从自由度为 $n-1$ 的分布，此时的检验统计量为 统计量：

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$



一、一个总体均值的检验

【例6.2】 国际机场协会（ACI）每年都对全球机场的服务质量进行测评。其中一项重要内容是对旅客进行问卷调查，由旅客对机场环境、航站楼清洁度、办票人员工作效率、工作人员友好程度、引导标识、设施便利性、候机区舒适度等等方面做出评价。某机场2012年度旅客综合评分为4.68分（评分采用10分制，最低为1分，最高为10分），2013年度一个由50名旅客组成的随机样本对该机场服务质量的评分数据如下：



一、一个总体均值的检验

4.6	4.8	3.4	4.5	5.0	5.3	3.3	3.5	5.2	5.4
4.2	4.3	2.8	5.2	5.1	3.6	4.6	4.7	4.5	5.3
6.1	5.4	6.0	5.5	4.2	4.6	5.1	6.2	3.5	3.8
5.5	7.0	4.8	6.4	5.0	5.5	3.8	6.2	5.4	5.5
4.5	6.5	3.8	6.5	5.5	5.6	6.2	5.5	4.6	4.5

试用0.05的显著性水平检验：2013年度该机场的旅客总体评分是否显著地高于2012年。



一、一个总体均值的检验

解：首先需要计算出样本均值和标准差。根据公式有：

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 4.96(\text{分}), s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}} = 0.95(\text{分})$$

根据题意提出假设： $H_0 : \mu \leq 4.68$; $H_1 : \mu > 4.68$

计算检验统计量的值：

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{4.96 - 4.68}{0.95/\sqrt{50}} = 2.08 > t_{0.05}(49) = 1.68$$

故拒绝原假设、接受备择假设，可以推断该机场2013年度旅客总体评分显著地高于2012年。



二、两个总体均值差的检验

独立样本

进行比较的两个样本是各自独立抽取的，彼此没有关系，样本容量可以相等也可以不等；但通常认为样本容量相等时，检验功效会高一些。

匹配样本

进行比较的两个样本的抽取不是独立的，其样本单位存在一一对应关系，也称为配对样本，匹配样本的样本容量相等。



二、两个总体均值差的检验

两总体均值差检验的假设形式：

双侧检验 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0; \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$

左侧检验 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq D_0; \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0$

右侧检验 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq D_0; \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$



二、两个总体均值差的检验

(一) 独立大样本、总体标准差已知

当两个样本的容量足够大（均大于等于30）时，样本均值差的抽样分布服从正态分布：

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

则其相应的检验统计量 Z 为：

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$



二、两个总体均值差的检验

【例6.3】某公司有A、B两台设备用于制造同一种专用螺栓，直径规格为20mm。根据以往经验，A设备生产螺栓直径的标准差为0.15mm，B设备生产螺栓直径的标准差为0.12mm。某日从两台设备制造的螺栓中分别抽取了30个测量，发现A设备样本直径均值为20.04mm，B设备样本直径均值为20.08mm。试以0.05的显著性水平检验：两台设备生产的全部产品在直径上是否存在显著差异。



二、两个总体均值差的检验

解：提出假设： $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

确定显著性水平及临界值：

$$\alpha = 0.05 \quad Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96, \quad -Z_{\alpha/2} = -Z_{0.025} = -1.96$$

确定拒绝原假设的规则： $Z > Z_{\alpha/2}$ 或 $Z < -Z_{\alpha/2}$

计算并决策：

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(20.04 - 20.08) - 0}{\sqrt{\frac{0.15^2}{30} + \frac{0.12^2}{30}}} = \frac{-0.04}{0.0351} = -1.14 > -1.96$$

故不能拒绝原假设，即：没有充分理由认为两台设备生产的产品直径有显著差异。



二、两个总体均值差的检验

(二) 独立大样本、总体标准差未知

大样本、方差未知的情况下，可分别以两个样本方差 s_1^2 和 s_2^2 做为两个总体方差 σ_1^2 和 σ_2^2 的点估计，并得出服从 Z 分布的检验统计量：

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$



二、两个总体均值差的检验

(三) 独立小样本、总体标准差未知

当两样本均为小样本或其中之一为小样本时，若满足：每个总体都服从正态分布、两个总体的方差相等（即标准差相等）、样本相互独立，则可以构造 t 统计量做两个总体均值差的检验：

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

式中， $s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ 为合并的样本标准差



二、两个总体均值差的检验

【例6.4】某品牌时装公司销售部门为制订更合理的销售价格及折扣方法，对购买该品牌时装的顾客做了抽样调查，分别从光顾城中心专卖店和城郊折扣店的顾客中随机抽取36人和25人，调查他们的月收入水平。试以0.05的显著性水平推断：专卖店顾客总体的月平均收入水平是否显著地高于折扣店顾客总体。

样本	月收入（万元）											
专卖店	1.5	1.4	1.8	1.5	1.6	1.1	1.0	1.1	2.5	2.2	0.9	1.6
	1.8	1.9	1.1	0.8	0.9	1.3	1.3	1.5	1.5	1.7	2.0	2.2
	1.3	1.5	1.2	0.9	0.8	0.8	1.0	1.1	0.9	0.8	1.0	1.1
折扣店	1.2	1.1	1.0	0.9	0.9	0.6	2.1	1.3	1.5	1.0	1.1	0.9
	1.5	1.4	1.9	1.1	1.8	0.9	1.1	0.9	1.4	1.7	1.5	1.4
	0.8											



二、两个总体均值差的检验

解：专卖店： $\bar{x}_1 = \frac{\sum x}{n_1} = \frac{48.6}{36} = 1.35(\text{万元})$ $s_1 = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}} = 0.4469(\text{万元})$

折扣店： $\bar{x}_2 = \frac{\sum x}{n_2} = \frac{31}{25} = 1.24(\text{万元})$ $s_2 = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1}} = 0.3742(\text{万元})$

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{35 \times 0.4469^2 + 24 \times 0.3742^2}{59}} = 0.4189(\text{万元})$$

提出假设： $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$

计算并决策： $t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(1.35 - 1.24) - 0}{0.4189 \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{25}}} = 1.008 < 1.67$

故不能拒绝原假设，即：没有充分理由认为专卖店顾客总体的月平均收入水平明显高于折扣店顾客。



二、两个总体均值差的检验

SPSS操作步骤:

- 打开数据，选择检验方法:

Analyze→Compare Means→Independent Sample T Test

- 设置变量:

“input” →Test Variable(s)

- 设置分组变量:

“category” →Grouping Variable(s) → Define Groups

- 设置检验置信度:

Options→Confidence interval→Continue→OK



二、两个总体均值差的检验

输出结果:

Group Statistics

类别	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
月收入（万元） 专卖店	36	1.350	.4469	.0745
折扣店	25	1.240	.3742	.0748

Independent Samples Test

		月收入（万元）	
		Equal variances assumed	Equal variances not assumed
Levene's Test for Equality of Variances	F	.932	
	Sig.	.338	
t-test for Equality of Means	t	1.009	1.042
	df	59	56.848
	Sig. (2-tailed)	.317	.302
	Mean Difference	.1100	.1100
	Std. Error Difference	.1090	.1056
	95% Confidence Interval of the Difference	Lower	Lower
		Upper	Upper



二、两个总体均值差的检验

(五)匹配样本的假设检验

由于匹配样本的个体具有对应关系，则根据每对个体的变量值可以计算差值 d 及其均值 $\bar{d}$ 。可以假定：若两个总体均值相同，则 d 的均值应当为零，即： $\mu_d = 0$ 。这样，匹配样本两总体均值差检验就转化为检验 μ_d 是否为零的问题，检验统计量为 t ，服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布。即：

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_d / \sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad \text{式中 } s_d = \sqrt{\frac{\sum (d - \bar{d})^2}{n-1}}$$



二、两个总体均值差的检验

【例6.5】 学生慢跑锻炼前后脉搏恢复时间及差值

学生	脉搏恢复时间（分钟）			学生	脉搏恢复时间（分钟）		
	锻炼前	锻炼后	差值d		锻炼前	锻炼后	差值d
1	13.5	12.1	1.4	16	13.5	10.8	2.7
2	12.6	11.3	1.3	17	13.8	8.9	4.9
3	13.8	10.5	3.3	18	14.5	10.1	4.4
4	11.1	9.1	2.0	19	12.5	8.5	4.0
5	14.2	11.0	3.2	20	12.8	9.2	3.6
6	11.0	8.8	2.2	21	12.6	8.3	4.3
7	12.5	9.5	3.0	22	14.8	10.1	4.7
8	14.6	13.0	1.6	23	14.5	11.5	3.0
9	13.5	10.5	3.0	24	11.3	7.5	3.8
10	12.1	12.3	-0.2	25	12.3	9.0	3.3
11	10.8	7.8	3.0	26	12.6	8.2	4.4
12	11.0	11.5	-0.5	27	12.1	7.8	4.3
13	12.3	9.9	2.4	28	10.5	7.0	3.5
14	11.5	9.8	1.7	29	11.2	9.9	1.3
15	12.0	10.1	1.9	30	12.5	10.0	2.5

试以0.05的显著性水平检验：学生慢跑锻炼前后脉搏恢复时间是否具有显著差异。



二、两个总体均值差的检验

解：样本差值的均值和标准差：

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{84}{30} = 2.8(\text{分钟}) \quad s_d = \sqrt{\frac{\sum (d - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{53.1}{29}} = 1.3532(\text{分钟})$$

提出假设： $H_0 : \mu_d = 0$; $H_1 : \mu_d \neq 0$

确定显著性水平及临界值：

$$\alpha = 0.05, t_{0.025}(29) = 2.045, -t_{0.025}(29) = -2.045$$

计算检验统计量并做出决策：

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{2.8 - 0}{1.3532 / \sqrt{30}} = 11.33 > 2.045$$

故拒绝原假设、接受备择假设，可以认为锻炼后脉搏恢复时间显著地低于锻炼前水平。



二、两个总体均值差的检验

SPSS操作步骤:

- 打开数据，选择检验方法：

Analyze→Compare Means→Paired-Sample T Test

- 设置变量：

“time1”、“time2”→Paired Variables

- 设置检验置信度：

Options→Confidence interval→Continue→OK



二、两个总体均值差的检验

输出结果：

Paired Samples Test			
		Pair 1	
		锻炼前脉搏恢复时间（分钟） - 锻炼后脉搏恢复时间（分钟）	
Paired Differences	Mean	2.8000	
	Std. Deviation	1.3532	
	Std. Error Mean	.2471	
	95% Confidence Interval of the Difference	Lower	2.2947
		Upper	3.3053
t	11.334		
df	29		
Sig. (2-tailed)	.000		

即可以据此拒绝原假设、接受备择假设，可以认为锻炼后脉搏恢复时间显著地低于锻炼前水平。



第三节 总体比率的检验

- 一、单一总体比率的检验
- 二、使用SPSS软件实现单一总体比率的检验
- 三、两总体比率差的检验
- 四、使用SPSS软件实现两总体比率差的检验



一、单一总体比率的检验

单一总体比率检验的假设形式：

双侧检验 $H_0 : \Pi = \Pi_0; \quad H_1 : \Pi \neq \Pi_0$

左侧检验 $H_0 : \Pi \geq \Pi_0; \quad H_1 : \Pi < \Pi_0$

右侧检验 $H_0 : \Pi \leq \Pi_0; \quad H_1 : \Pi > \Pi_0$

式中， Π_0 表示待检验的总体比率。



一、单一总体比率的检验

当样本容量足够大，即 $n\Pi$ 和 $n(1 - \Pi)$ 都大于等于5时，样本比率 p 的抽样分布近似服从均值为 Π 、标准差为 $\sqrt{\Pi(1-\Pi)}/\sqrt{n}$ 的正态分布，得到检验统计量：

$$Z = \frac{p - \Pi_0}{\sqrt{\Pi_0(1 - \Pi_0)}/\sqrt{n}}$$



一、单一总体比率的检验

【例6.6】甲企业产品中使用的微型电动机采购自专门制造这种电动机的乙企业。合同规定，若一批电动机的次品率不高于5%，甲企业应当接收；若次品率高于5%，则产品要退回，乙企业同时还要承担相应的运输、检验费用和损失。现有一批电动机到货，抽取100件进行检验，发现有6件次品，样本次品率为6%。试以0.05的显著性水平检验：该批产品的次品率是否明显地高于规定的标准。



一、单一总体比率的检验

解：由于 $n\Pi = 5$, $n(1 - \Pi) = 95$, 均大于等于5, 样本容量足够大, 可以使用Z检验方法, 且为右侧检验。

提出假设: $H_0 : \Pi \leq 0.05, H_1 : \Pi > 0.05$

确定显著性水平和临界值: $\alpha = 0.05, Z_{\alpha} = Z_{0.05} = 1.645$

计算并做出决策:

$$Z = \frac{p - \Pi_0}{\sqrt{\Pi_0(1 - \Pi_0)}/\sqrt{n}} = \frac{0.06 - 0.05}{\sqrt{0.05 \times 0.95}/\sqrt{100}} = 0.4588 < 1.645$$

故不能拒绝原假设, 不能认为该批电动机次品率高于规定的标准, 应当予以接收。



二、使用SPSS软件实现单一总体比率的检验

操作步骤:

- 打开数据，选择检验方法：

Analyze→Nonparametric Tests→Binomial Test

- 设置变量：

“result” → Test Variable List

- 设置检验比例：

Test Proportion: 0.95

- 点击OK，得到输出结果。



二、使用SPSS软件实现单一总体比率的检验

输出结果：

Binomial Test						
		Category	N	Observed Prop.	Test Prop.	Exact Sig. (1-tailed)
检验结果	Group 1	合格品	96	.96	.95	.436
	Group 2	次品	4	.04		
	Total		100	1.00		

结果显示的p-值为0.436，由于其大于0.05的显著性水平，故检验结论是不能拒绝原假设。



三、两总体比率差的检验

设两总体比率差为 D_0 ，则两总体比率差检验的假设形式为：

双侧检验 $H_0 : \Pi_1 - \Pi_2 = D_0; \quad H_1 : \Pi_1 - \Pi_2 \neq D_0$

左侧检验 $H_0 : \Pi_1 - \Pi_2 \geq D_0; \quad H_1 : \Pi_1 - \Pi_2 < D_0$

右侧检验 $H_0 : \Pi_1 - \Pi_2 \leq D_0; \quad H_1 : \Pi_1 - \Pi_2 > D_0$

最常见的检验是推断两总体比率是否相同，即两总体比率差的检验问题最常见的是双侧检验。



三、两总体比率差的检验

分别由两个总体中抽取两个独立的随机样本，样本容量充分大时，样本比率之差 $p_1 - p_2$ ，服从以 $\Pi_1 - \Pi_2$ 为数学期望的**正态分布**，其方差为：

$$\frac{\Pi_1(1 - \Pi_1)}{n_1} + \frac{\Pi_2(1 - \Pi_2)}{n_2}$$

将其标准化之后，可得服从标准正态分布的 Z 统计量：

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\Pi_1 - \Pi_2)}{\sqrt{\frac{\Pi_1(1 - \Pi_1)}{n_1} + \frac{\Pi_2(1 - \Pi_2)}{n_2}}}$$



三、两总体比率差的检验

当样本容量足够大 ($n_1\Pi_1 \geq 5, n_1(1-\Pi_1) \geq 5; n_2\Pi_2 \geq 5, n_2(1-\Pi_2) \geq 5$) 时，同时我们通常假定两总体比率相等，即： $\Pi_1 = \Pi_2$ ，这样得到检验统计量：

$$Z = \frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{\Pi(1 - \Pi) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

由于总体比率 Π 未知，可以用两个样本比率 p_1 和 p_2 的合并估计值来代替：

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

由此得到检验统计量：

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1 - p) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$



三、两总体比率差的检验

【例6.7】某省一项针对女性社会地位的调查结果显示：被调查的1200名20至30岁青年女性中，拥有大专及以上学历者为390人，占32.5%；被调查的1000名20至30岁青年男性中，拥有大专及以上学历者为306人，占30.6%。试以0.05的显著性水平检验：该省30岁以下青年女性中，拥有大专及以上学历的比率是否显著地高于青年男性的这一比率。



解： 因为 $n_1 p_1 = 390 \geq 5$, $n_1(1 - p_1) = 810 \geq 5$; $n_2 p_2 = 306 \geq 5$, $n_2(1 - p_2) = 694 \geq 5$
可知两样本容量均足够大。

提出假设: $H_0: \Pi_1 - \Pi_2 \leq 0$; $H_1: \Pi_1 - \Pi_2 > 0$

确定显著性水平及临界值: $\alpha = 0.05$, $Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645$

计算总体比率 Π 的合并估计值 p :

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \frac{0.325 \times 1200 + 0.306 \times 1000}{1200 + 1000} = 0.3164$$

计算检验统计量并决策:

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.325 - 0.306}{\sqrt{0.3164 \times 0.6836 \left(\frac{1}{1200} + \frac{1}{1000}\right)}} = \frac{0.019}{0.0199} = 0.9541 < 1.645$$

故不能拒绝原假设, 即没有充分证据证明, 该省30岁以下女性青年拥有大专及以上学历的比率明显高于男性青年的这个比率。

四、使用SPSS软件实现两总体比率差的检验

操作步骤：

- 打开数据，选择检验方法：

Analyze→Nonparametric Tests→2 Independent-Samples Test

- 设置变量：

“education” →Test Variable List

“gender” →Grouping Variable

- 使用系统默认检验方法：

Mann-Whitney U（曼-惠特尼U）

- 点击OK，得到输出结果。



四、使用SPSS软件实现两总体比率差的检验

输出结果:

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of 学历 is the same across categories of 性别.	Independent-Samples Mann-Whitney U Test	.443	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

结果显示的 p -值为0.443，明显大于0.05的显著性水平，故检验结论是不能拒绝原假设。



第四节 总体方差的检验

一、单一总体方差的检验

二、两总体方差的检验

三、使用SPSS软件实现两个或多个总体方差的检验



一、单一总体方差的检验

若样本来自于正态总体，且总体方差等于某个确定的值 σ_0^2 ，则可构造单一总体方差检验的检验统计量为：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

注意：对于给定的显著性水平 α ，单侧检验时，若 χ_α^2 为右侧临界值，则左侧临界值为 $\chi_{1-\alpha}^2$ ；双侧检验时， $\chi_{\alpha/2}^2$ 为右侧临界值，则左侧临界值为 $\chi_{1-\alpha/2}^2$ 。



一、单一总体方差的检验

检验准则:

- 双侧检验: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2;$
拒绝准则: $\chi^2 > \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 < \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
- 左侧检验: $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2, \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 ;$
拒绝准则: $\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
- 右侧检验: $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2, \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 ;$
拒绝准则: $\chi^2 > \chi_{\alpha}^2(n-1)$



一、单一总体方差的检验

【例6.8】某产品外径加工规格要求为 $15 \pm 0.3\text{cm}$ ，实际工作中已经将加工误差即标准差控制到 0.1cm ，加工误差近似服从正态分布。企业为进一步提高该产品的质量，又对设备做了改进，改进后随机抽取了30件产品测量，加工误差均值为 0.07cm ，即方差为 0.0049 。试以 0.05 的显著性水平检验：设备改进后产品总体的加工误差水平是否有明显的下降。



一、单一总体方差的检验

解：提出假设： $H_0 : \sigma^2 \geq 0.01$; $H_1 : \sigma^2 < 0.01$

确定显著性水平及临界值：

$$\alpha = 0.05, \quad \chi^2_{0.95}(29) = 17.71$$

计算并做出决策：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{29 \times 0.0049}{0.01} = 14.21 < 17.71$$

故拒绝原假设、接受备择假设，设备改进后产品总体的加工误差水平有明显的下降。



二、两总体方差的检验

当两个总体均为正态总体且总体方差相等时，两个样本方差之比服从分子自由度为 $n_1 - 1$ 、分母自由度为 $n_2 - 1$ 的 F 分布，即：

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$



二、两总体方差的检验

两总体方差检验的假设形式：

双侧检验： $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2; \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

右侧检验： $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2; \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

说明：因为计算 F 值的分子为较大的样本方差，尾概率将出现在 F 分布右侧，这时只需要将其与右侧临界值比较，因此左侧检验是不存在的。



二、两总体方差的检验

【例6.9】某公司有A、B两条生产线生产同一种产品，某日从两条生产线分别抽取容量均为25的样本测量产品基本参数，样本A均值为10.03mm，方差为0.0064mm²；样本B均值为10.02mm，方差为0.0025mm²。试以0.05的显著性水平检验：两条生产线生产的产品总体方差是否存在显著差异。



二、两总体方差的检验

解：提出假设： $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$; $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

确定显著性水平及临界值：

$$\alpha = 0.05, F_{0.05}(24, 24) = 1.98$$

计算并做出决策：

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.0064}{0.0025} = 2.56 > 1.98$$

故拒绝原假设、接受备择假设，可以认为两条生产线所生产的产品总体方差存在显著差异。



三、使用SPSS软件实现两个或多个总体方差的检验

操作步骤:

(以检验三个品牌设备工作效率的方差为例, 见数据集data6_05)

- 打开数据, 选择检验方法:

Analyze→Descriptive Statistics→Explore

- 设置变量:

“output” →Dependent List

“brand” →Factor List

- 设置Plots选项:

Plots →Spread vs Level with Levene Test → Untransformed

- 点击OK, 得到输出结果。



二、两总体方差的检验

输出结果:

Test of Homogeneity of Variance				
	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
产量 Based on Mean	1.069	2	25	.358
Based on Median	1.035	2	25	.370
Based on Median and with adjusted df	1.035	2	24.839	.370
Based on trimmed mean	1.069	2	25	.358

无论是基于哪种Levene统计量判断，都不能拒绝原假设，即检验结论是，三个总体的方差都相等。



