

扫码点单 免排队

(微信/支付宝扫码点单)

周二‘默契日’第二杯半价

●小程序下单，买两杯，第二杯半价（价低款半价），节假日除外，活动详情以店内为准



扫码入群

茉沏 MORE CHEERS
江南新式茶饮 赏江南之雅 品茉沏之韵

📍 东北财经大学梁园G座宿舍楼下正对面（浴池旁边）

高数下

本店远程打印营业时间：早8:15 -晚21:50（周三、周日晚20:50止）

温馨提示：

手机远程打印应适用于排好版的文档（PDF, word, 图片格式等不需要排版的文件）
excel表格建议请到店内存电脑上打印。

高等数学 2A

课程号: 11020044A 课序号: 01-11 开课学院: 数学学院

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
题分	10	10	24	28	8	10	10	100
得分								
评阅人								

一、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \left(\frac{\sin x}{x} \right)' dx = (\quad)$.

- A. $\frac{\sin x}{x}$ B. $\frac{\sin x}{x} + C$ C. $\frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$ D. $\frac{\sin x}{x} - \frac{\pi}{2}$

2. 下列极限存在的是().

- A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$ B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x+y}$
 C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x+y}$ D. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \sin \frac{1}{x+y}$

3. 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则 ().

- A. $f'_x + f'_y = 0$ B. $f'_x + f'_y = f$
 C. $f'_x - f'_y = 0$ D. $f'_x - f'_y = f$

4. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cdot \cos^4 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$

则有 ().

- A. $N > M > P$ B. $M > P > N$ C. $N > P > M$ D. $P > M > N$

5. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 的敛散性是().

- A. 当 $p \leq 1$ 时绝对收敛 B. 当 $p \leq 1$ 时条件收敛
C. 当 $p > 1$ 时绝对收敛 D. 当 $p > 1$ 时条件收敛

二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 \varphi \cdot \tan^2 \varphi d\varphi =$ _____.

2. 二元函数 $z = \frac{1}{(x^2 + y^2)\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}$ 的定义域为 _____.

3. 设函数 $f(x, y) = y^{\sin x}$, 则 $df(0, e) =$ _____.

4. 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ 的敛散性为 _____. (填收敛或发散)

5. 微分方程 $ydx + (x^2 - \frac{1}{4})dy = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

三、计算题 (每小题 6 分, 共 24 分)

1. 求定积分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx$

2. 求定积分 $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$

3. 设函数 $u = f(x, xy, xyz)$, 其中 f 有二阶偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$

4. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + x = e^{z-y}$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

四、计算题 (每小题 7 分, 共 28 分)

1. 计算二次积分 $\int_1^5 dy \int_y^5 \frac{dx}{y \ln x}$

2. 计算二重积分 $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$ ，其中区域 D 由曲线 $x = \sqrt{2 - y^2}$ 与 y 轴围成.

3. 讨论无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+1)$ 的敛散性.

4. 设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt + e^{-x} - 1$ ，求 $f(x)$ 的表达式.

五、(本题 8 分)

已知点 $(1,1)$ 是函数 $f(x,y) = x^k + y^k - x^2 - 2xy - y^2$ 的一个驻点, 其中 k 为常数.

- (1) 确定常数 k ;
- (2) 求该函数的极值点与极值.

六、(本题 10 分)

设位于曲线 $y = e^{-x}$ ($0 \leq x < +\infty$) 下方、 x 轴上方的无界区域为 D .

- (1) 求区域 D 的面积;
- (2) 求区域 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

七、(本题 10 分)

某厂家生产的同一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为 p_1 和 p_2 (单位: 万元/吨), 销售量分别为 Q_1 和 Q_2 (单位: 吨), 需求函数分别为 $Q_1 = 24 - 0.2p_1$ 和 $Q_2 = 10 - 0.05p_2$, 总成本函数为 $C = 35 + 40(Q_1 + Q_2)$ 。厂家满负荷生产时, 年产量为 10 吨, 试问厂家如何确定两个市场的售价, 才能使获得的总利润最大?

高等数学 2A 答案

课程号: 11020044A

课序号: 01-11

开课学院: 数学学院

一、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

C D B A C

二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. $\frac{1}{3}$ 2. $0 < x^2 + y^2 < 1$ 3. dx 4. 发散 5. $\frac{1+2x}{1-2x} C$

三、计算题 (每小题 6 分, 共 24 分)

1. 解 设 $x = \tan t$

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \csc t dt \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= \ln |\csc t - \cot t| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\ln(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$2. \text{ 解 原式} = \frac{2}{3} \int_1^e \ln x dx^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \sqrt{x} dx \right) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= \frac{2}{9} e^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$3. \text{ 解 } \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + y f'_2 + z f'_3 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = x y f''_{13} + x y^2 f''_{23} + x y^2 z f''_{33} + y f'_3 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$4. \text{ 解 设 } F(x, y, z) = e^{z-y} - x - z$$

$$\text{则 } F_x = -1, \quad F_y = -e^{z-y}, \quad F_z = e^{z-y} - 1$$

$$\text{于是 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^{z-y} - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{z-y}}{e^{z-y} - 1} = 1 + \frac{1}{e^{z-y} - 1} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{e^{z-y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{(e^{z-y} - 1)^2} = -\frac{e^{z-y}}{(e^{z-y} - 1)^3} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

四、计算题 (每小题 7 分, 共 28 分)

1. 解 原式 = $\int_1^e dx \int_1^x \frac{1}{y \ln x} dy$ 4 分

$$= \int_1^e \frac{1}{\ln x} \ln y \Big|_1^x dx$$

$$= 4$$
3 分

2. 解 原式 = $\iint_D \cos \theta dr d\theta$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \cos \theta dr$$
4 分

$$= 2\sqrt{2}$$
3 分

3. 解 因为 $\left| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+1) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\text{且 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$$
4 分

所以原级数 (绝对) 收敛3 分

4. 解 两边对 x 求导, 得

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt - e^{-x}$$

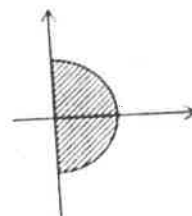
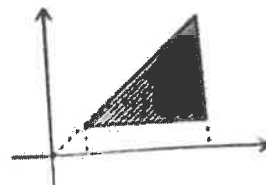
$$f'(x) - f(x) = e^{-x}$$
3 分

$$\text{解得 } f(x) = e^{\int dx} \left(\int e^{-x} e^{-\int dx} dx + C \right)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x} + C e^x$$
2 分

$$\text{利用 } f(0) = -1, \text{ 得 } C = -\frac{1}{2}$$

$$\text{故 } f(x) = -\frac{1}{2} (e^{-x} + e^x)$$
2 分



五、(本题 8 分)

解 (1) $f'_y = ky^{k-1} - 2x - 2y$

因为点 (1,1) 是驻点, 必有 $f'_x(1,1) = 0$,

所以 $k = 4$ 1 分

(2) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

驻点 (0,0), (1,1), (-1,-1) 2 分

经判别, 极大值点为 (0,0), 极大值为 $f(0,0) = 0$

极小值点为 (1,1) 和 (-1,-1), 极小值为 $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$ 1 分

六、(本题 10 分)

解 (1) $S = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ 5 分

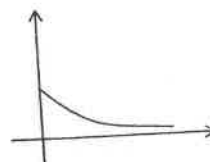
(2) $V_y = \pi \int_0^1 (-\ln y)^2 dy$ 2 分

$$= \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 (-\ln y)^2 dy$$

$$= \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[y(\ln y)^2 \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 y d(\ln y)^2 \right]$$

$$= \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\varepsilon(\ln \varepsilon)^2 + 2\varepsilon \ln \varepsilon + 2 - 2\varepsilon \right]$$

$$= 2\pi$$
 3 分



七、(本题 10 分)

解 $\pi = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 - C$

$$= -0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 + 32p_1 + 12p_2 - 1395$$
 2 分

且 $Q_1 + Q_2 = 10$ 即 $0.2p_1 + 0.05p_2 = 24$

设 $F = -0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 + 32p_1 + 12p_2 - 1395 + \lambda(0.2p_1 + 0.05p_2 - 24)$ 3 分

得方程组

$$\begin{cases} -0.4p_1 + 32 + 0.2\lambda = 0 \\ -0.1p_2 + 12 + 0.05\lambda = 0 \\ 0.2p_1 + 0.05p_2 = 24 \end{cases}$$
 3 分

解得 $p_1 = 88, p_2 = 128$ 2 分

高等数学 2A

课程号: 11020044A 课序号: 01-13 开课学院: 数学与数量经济学院

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
题分	10	10	24	28	8	10	10	100
得分								
评阅人								

一、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设 $f(x) = \int_0^x x \cos t dt$, 则有 ().

A. $f(x) = x \cos x$

B. $f'(x) = x \cos x$

C. $f(x) = x \cos x + \sin x$

D. $f'(x) = x \cos x + \sin x$

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $A = \int_a^b f(2x+1) d(2x+1)$, $B = \int_a^b f(x) dx$, 则 A 与 B 的大小关系为 ().

A. $A < B$

B. $A > B$

C. $A = B$

D. 无法判定

3. 设函数 $z = xy$, 则点 $(0,0)$ ().

A. 不是驻点

B. 是驻点但不是极值点

C. 是驻点且为极小值点

D. 是驻点且为极大值点

4. 方程 $x^2 + y^2 = 0$ 在空间直角坐标系下表示 ().

A. 一个点

B. 一条直线

C. 一张平面

D. 一个圆柱体

5. 下列无穷级数中, 条件收敛的是 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) = x + 2\int_0^1 f(x)dx$, 则 $f(x) =$ _____.
2. 函数 $z = \sqrt{1-2x-y^2}$ 的定义域为 _____.
3. 设函数 $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 =$ _____.
4. 交换积分次序: $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y)dx =$ _____.
5. 微分方程 $y' + 2y = e^{-x}$ 的通解为 $y =$ _____.

三、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

1. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx$

2. 求定积分 $\int_0^1 \ln(1 + \sqrt[3]{x}) dx$

3. 设可微函数 $f(u, v)$ 满足 $f(e^{xy}, x+y) = x^3 + y^3$, 求 $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u^2}$

4. 已知由方程 $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1$ 确定了函数 $z = f(x, y)$, 求 dz .

四、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 计算二重积分 $\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} dx dy$, 其中区域 D 由抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x = 1$ 、 $x = 2$ 及 x 轴围成.

2. 计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中区域 D 由曲线 $x = \sqrt{2y - y^2}$ 及 y 轴围成.

3. 求微分方程 $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ 的通解及满足条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解.

4. 讨论无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{10n}$ 的敛散性

五、（本题 8 分）求函数 $f(x, y) = 9x^3 + \frac{y^3}{3} - 4xy$ 的极值.

六、（本题 10 分）已知曲线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处有公共切线.

- (1) 求 a 的值及点 $P(x_0, y_0)$ 的坐标;
- (2) 求由这两条曲线及 x 轴所围成的平面图形 D 的面积 S ;
- (3) 求平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积 V .

七、(本题 10 分)

经济学中有 Cobb-Douglas 生产函数模型: $Q(x, y) = Cx^\alpha y^{1-\alpha}$, 式中 x 表示劳动力的数量, y 表示资本数量, C 与 α ($0 < \alpha < 1$) 是常数, 由不同企业的具体情形决定, 函数值 Q 表示生产量. 现已知某生产商的 Cobb-Douglas 生产函数为 $Q(x, y) = 80x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$, 若每单位劳力需 600 元, 每单位资本是 2000 元, 工厂对该产品的劳力和资本的投入总预算是 40 万元, 为使生产量最大, 试求最佳资金投入分配方案.

高等数学 2A

课程号: 11020044A

课序号: 01-15

开课学院: 数学与数量经济学院

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
题分	10	10	24	28	10	10	9	100
得分								
评阅人								

一、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

D D B B C

二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. $x-1$ 2. $2x+y^2 \leq 1$ 3. $\frac{1}{x^2+y^2}$

4. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy$ 5. $e^{-x} + Ce^{-2x}$

三、计算题 (每小题 6 分, 共 24 分)

1. 解 原式 $= -\frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ 3 分

$= \frac{1}{2} \ln 2$ 3 分

2. 解 设 $t = 1 + \sqrt[3]{x}$, 则 $x = (t-1)^3$

原式 $= \int_1^2 \ln t d(t-1)^3$ 3 分

$= (t-1)^3 \ln t \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t} dt$

$= \ln 2 - \int_1^2 \left(t^2 - 3t + 3 - \frac{1}{t} \right) dt$

$= 2 \ln 2 - \frac{5}{6}$ 3 分

3. 解 设 $u = e^{xy}$, $v = x + y$, 分别对 x, y 求偏导数, 得

$$\begin{cases} ye^{xy} f'_u + f'_v = 3x^2 \\ xe^{xy} f'_u + f'_v = 3y^2 \end{cases}$$

解得 $\frac{\partial f}{\partial u} = f'_u = -\frac{3(x+y)}{e^{xy}} = -\frac{3v}{u}$ 3 分

所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = f''_{uu} = \left(-\frac{3v}{u}\right)'_u = \frac{3v}{u^2} = \frac{3(x+y)}{e^{2xy}}$ 3 分

4. 解 设 $F(x, y, z) = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z - 1$

则 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin x \cos x}{\sin z \cos z}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sin y \cos y}{\sin z \cos z}$ 3 分

所以 $dz = -\frac{\sin x \cos x}{\sin z \cos z} dx - \frac{\sin y \cos y}{\sin z \cos z} dy$ 3 分

四、计算题 (每小题 7 分, 共 28 分)

1. 解 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, 1 \leq x \leq 2\}$

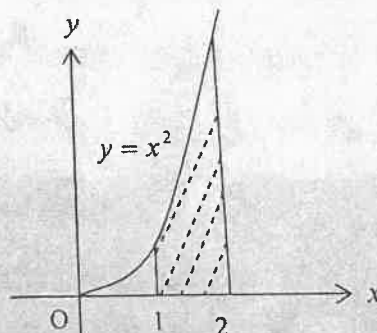
$$\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} dx dy$$

$$= \int_1^2 dx \int_0^{x^2} \frac{1}{x^4 + y^2} dy$$
4 分

$$= \int_1^2 \frac{1}{x^2} \arctan \frac{y}{x^2} \Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{8}$$
3 分



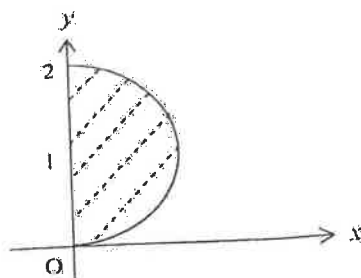
2. 解 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \right\}$

$$\iint_D xy d\sigma = \iint_D r^3 \sin \theta \cos \theta dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^3 \sin \theta \cos \theta dr \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{2}{3} \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$



3. 解 设 $u = \frac{y}{x}$

则 $x \frac{du}{dx} = e^{-u}$, 即 $e^u du = \frac{1}{x} dx$

解得 $e^u = \ln x + C$, 即 $u = \ln(\ln x + C)$

所以 通解为 $y = x \ln(\ln x + C) \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$

当满足条件 $y|_{x=1} = 1$ 时, $C = e$

所以 特解为 $y = x \ln(\ln x + e) \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$

4. 解 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{10(n+1)} \cdot \frac{10n}{|x|^n} = |x|$

当 $|x| < 1$ 时, 原级数收敛;

当 $|x| > 1$ 时, 原级数发散; $\dots\dots 4 \text{ 分}$

当 $x = -1$ 时, 因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10n}$ 收敛, 故原级数收敛;

当 $x = 1$ 时, 因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n}$ 发散, 故原级数发散 $\dots\dots 3 \text{ 分}$

综上, 当 $x \in [-1, 1)$ 时, 级数收敛, 当 $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ 时, 级数发散.

五、(本题 8 分)

解 由
$$\begin{cases} f'_x = 27x^2 - 4y = 0 \\ f'_y = y^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

得驻点 $(0,0), (\frac{4}{9}, \frac{4}{3})$ 4 分

又 $f''_{xx} = 54x, f''_{xy} = -4, f''_{yy} = 2y$

对于驻点 $(0,0)$: $A=0, B=-4, C=0, B^2 - AC = 16 > 0$, 故 $(0,0)$ 不是极值点

对于驻点 $(\frac{4}{9}, \frac{4}{3})$: $A=24, B=-4, C=\frac{8}{3}, B^2 - AC = -48 < 0$, 且 $A > 0$

故 $(\frac{4}{9}, \frac{4}{3})$ 是极小值点, 极小值 $f(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}) = -\frac{64}{81}$ 4 分

六、(本题 10 分)

解 (1) 因
$$\begin{cases} ax_0^2 = \ln x_0 \\ 2ax_0 = \frac{1}{x_0} \end{cases}$$

$\therefore a = \frac{1}{2e}, P(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$ 4 分

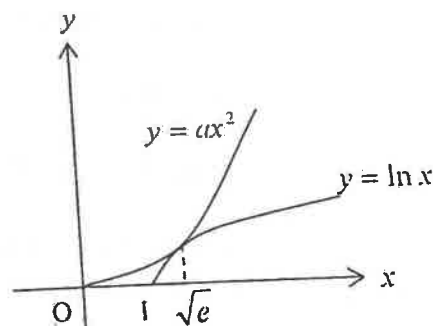
(2)
$$S = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2e} dx - \int_0^{\sqrt{e}} \ln x dx$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{6} - \left(1 - \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{e}}{3} - 1$$
 3 分

(3)
$$V_y = \pi \int_0^1 (e^{2y} - 2ey) dy$$

$$= \frac{e-2}{4} \pi$$
 3 分



七、(本题 10 分)

解: 设产出为 $Q(x, y) = 80x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$, 约束方程为 $600x + 2000y = 400,000$.

构造辅助函数 $F(x, y) = 80x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} + \lambda(600x + 2000y - 400,000)$,4 分

$$\text{解} \begin{cases} F'_x = 80 \times \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} + 600\lambda = 0, \\ F'_y = 80 \times \frac{1}{4} x^{\frac{3}{4}} y^{-\frac{3}{4}} + 2000\lambda = 0, \\ 600x + 2000y = 400,000. \end{cases} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

得 $x = 500, y = 50$ 为唯一驻点.2 分

高等数学 2A

课程号: 11020044A

课序号: 01-20

开课学院: 数学与数量经济学院

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
题分	10	10	30	28	7	7	8	100
得分								
评阅人								

一、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设 $\Phi(x) = \int_x^{2x} e^{t^2} dt$, 则 $\Phi'(x) = (\quad)$.

- A. $e^{2x} - e^x$ B. $e^{4x^2} - e^{x^2}$ C. $\frac{1}{2}e^{4x^2} - e^{x^2}$ D. $2e^{4x^2} - e^{x^2}$

2. 设 $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数 ().

- A. 都存在 B. 都不存在 C. 不都存在 D. 无法判定

3. 设函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{2}$, 则 u 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 $du = (\quad)$.

- A. 0 B. $\frac{dx}{\sqrt{2}} - \frac{dy}{\sqrt{2}}$ C. $\frac{dx}{\sqrt{2}} + \frac{dz}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{dx}{\sqrt{2}} - \frac{dz}{\sqrt{2}}$

4. 在下列级数中, 收敛的有 () 个.

- ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. yOz 面上的抛物线 $z^2 = 2y$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面方程为 ().

- A. $x^2 + z^2 = 2y$ B. $y^2 + z^2 = 2y$ C. $x^2 + y^2 = 2z$ D. $z^2 = 2(x^2 + y^2)$

二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 若 $a \int_0^1 x f(x^2) dx = \int_0^1 f(x) dx$ ($\neq 0$), 则 $a =$ _____.
2. 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 的敛散性为 _____.
3. 二元函数 $z = \arcsin \frac{x}{3} + \arccos \frac{y}{6}$ 的定义域为 _____.
4. 在某生产过程中, 资本投入为 K , 劳动投入为 L 时, 产品的产出量为 Q , 且 $Q = AK^\alpha L^\beta$, 其中 A, α, β 为常数, 则产量 Q 对资本投入 K 的偏弹性 $\varepsilon_K =$ _____, 对劳动投入 L 的偏弹性 $\varepsilon_L =$ _____.
5. 微分方程 $y' = \sqrt[4]{y}$ 的通解为 $y =$ _____.

三、计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 求定积分 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$

2. 求定积分 $\int_1^e \sin(\ln x) dx$

3. 设 $z = (y-x)^{y-x}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设函数 $z = xy f(xy, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5. 已知由方程 $yz - \ln z = x + y$ 确定了隐函数 $z = f(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. 计算二次积分 $\int_0^1 dy \int_{y^{\frac{1}{3}}}^1 \sqrt{1-x^4} dx$

2. 计算二重积分 $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} d\sigma$ ，其中区域 D 由直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 与 $y = \sqrt{3}x$ 、圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $x^2 + y^2 = 3$ 所围成的第一象限的部分。

3. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y - \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$ ($x > 0$) 的通解及满足条件 $y(1) = 0$ 的特解。

4. 讨论无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛性.

五、(本题 7 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 y^2 (6 - x - y)$ 在区域 $x > 0, y > 0$ 内的极值.

六、(本题 7 分)

设抛物线 $x = 4 - y^2$ 与直线 $x = 2y + 4$ 所围成的平面区域为 D .

(1) 求区域 D 的面积 S ;

(2) 求区域 D 绕 y 轴旋转一周所形成旋转体的体积 V_y .

七、(本题 8 分)

某工厂生产 A 、 B 两种型号的产品, 已知生产 A 产品 x 单位、 B 产品 y 单位时的总成本函数为 $C(x, y) = 70x + 30y + 100$, 两种产品的需求函数分别为 $x = 50 - \frac{P_A}{5}$ 与 $y = 30 - \frac{P_B}{3}$ (其中 P_A 、 P_B 分别是两种产品的价格). 如果限制两种产品的总产量为 20 单位, 那么 x 、 y 为多少时才能使总利润最大? 并求出最大利润.

高等数学 2A

课程号: 11020044A 课序号: 01-20 开课学院: 数学与数量经济学院

一、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

D C D B A

二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 2 2. 发散 3. $\{(x, y) | x \leq 3, y \leq 6\}$ 4. α, β 5. $\left(\frac{3}{4}x + C\right)^{\frac{4}{3}}$

三、计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 解 设 $t = \sqrt{2x+1}$

$$\text{原式} = \int_1^3 \frac{t^2 + 3}{2} dt \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= \frac{22}{3} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

2. 解 原式 $= x \sin(\ln x) \Big|_1^e - \int_1^e \cos(\ln x) dx$

$$= e(\sin 1 - \cos 1) - \int_1^e \sin(\ln x) dx \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \int_1^e \sin(\ln x) dx = \frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{2} - \frac{1}{2} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

3. 解 设 $z = u^v$, $u = y - x, v = y - x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y-x)^{y-x} [1 + \ln(y-x)] \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)^{y-x} [1 + \ln(y-x)] \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

4. 解 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf' + xy^2(f_1' + f_2')$ $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2(f_1' + f_2') + xy^3(f_{11}'' + 2f_{12}'' + f_{22}'') \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

5. 解 设 $F(x, y, z) = yz - \ln z - x - y$, 则 $F_x = -1, F_y = z - 1, F_z = y - \frac{1}{z}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z-z^2}{yz-1} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}(yz-1) - z\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(yz-1)^2} = -\frac{z^2 + z^2 y}{(yz-1)^3} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

四、计算题 (每小题 7 分, 共 28 分)

1. 原式 = $\int_0^1 dx \int_0^{x^3} \sqrt{1-x^4} dy$ 4 分

$$= \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1-x^4} dx$$

$$= \frac{1}{6} \text{ 3 分}$$

2. 解 $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} d\sigma = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{r} dr$ 4 分

$$= \frac{\pi}{12} \ln 3 \text{ 3 分}$$

3. 解 设 $u = \frac{y}{x}$, 则 $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{dx}{x}$

解得 $\arcsin u = -\ln x + C$

故通解 $y = x \sin(C - \ln x)$ 4 分

由条件 $y(1) = 0$, 得 $\sin C = 0$, 即 $C = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

故特解 $y = x \sin(k\pi - \ln x) (k \in \mathbb{Z})$ 3 分

4. 解 先考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$

因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |x|$ 2 分

当 $|x| < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (绝对) 收敛 1 分

当 $|x| > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 发散 1 分

当 $x = -1$ 时, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (绝对) 收敛 1 分

当 $x = 1$ 时, 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 1 分

综上, 当 $-1 \leq x < 1$ 时, 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 收敛;

当 $x < -1$ 或 $x \geq 1$ 时, 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 发散.

五、(本题 7 分)

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = x^3 y^2 (18 - 4x - 3y) = 0 \\ f_y = x^3 y (12 - 2x - 3y) = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} f_x = x^3 y^2 (18 - 4x - 3y) = 0 \\ f_y = x^3 y (12 - 2x - 3y) = 0 \end{cases}} \right\} 4'$$

得在区域 $x > 0, y > 0$ 内的驻点为 $(3, 2) \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{又 } A = -144 < 0, B = -108, C = -162, \text{ 且 } AC - B^2 > 0, A < 0 \dots\dots\dots 1 \text{ 分} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} A = -144 < 0, B = -108, C = -162, \\ \text{且 } AC - B^2 > 0, A < 0 \end{matrix}} \right\} 3'$$

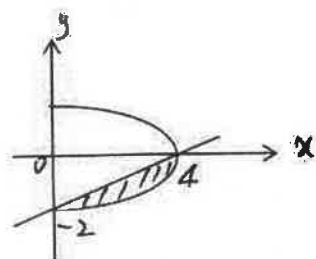
故极大值 $f(3, 2) = 108 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

六、(本题 7 分)

解 画图 $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\begin{aligned} (1) S &= \int_0^4 \left(\frac{x}{2} - 2 + \sqrt{4-x} \right) dx = \int_{-2}^0 (4 - y^2 - 2y - 4) dy \\ &= \frac{4}{3} \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) V_x &= \pi \int_{-2}^0 \left((4 - y^2)^2 - (2y + 4)^2 \right) dy \\ &= \frac{32}{5} \pi \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$



七、(本题 8 分)

解 求利润函数 $L(x, y) = -5x^2 + 180x - 3y^2 + 60y - 100$

满足条件 $x + y = 20$ 的极值 $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{设 } F(x, y, \lambda) = -5x^2 + 180x - 3y^2 + 60y - 100 + \lambda(x + y - 20) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} F(x, y, \lambda) = -5x^2 + 180x - 3y^2 + 60y - 100 + \lambda(x + y - 20) \\ \text{解方程组} \end{matrix}} \right\} 4'$$

解方程组

$$\begin{cases} -10x + 180 + \lambda = 0 \\ -6y + 60 + \lambda = 0 \\ x + y = 20 \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

解得 $x = 15, y = 5 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

最大利润 $L(15, 5) = 1700 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

高等数学 2B

课程号: 11020044B 课序号: 01-11 开课学院: 数学与数量经济学院

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
题分	12	12	30	24	9	9	4	100
得分								
评阅人								

一、填空题 (每小题 2 分, 共 12 分)

1. 定积分 $\int_0^{\pi} x \sin^2 x dx = 0$

2. 二元函数 $z = \arccos(x^2 + y^2 - 1)$ 的连续区域为 $z = \arccos(x^2 + y^2 - 1) \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2$

3. 设函数 $z = x^x + y^x$, 则全微分 $dz|_{(1,1)} = dx + dy$

4. 将函数 $f(x) = \frac{1}{3-x}$ 展开为麦克劳林级数: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n, \quad (-2 < x < 3)$

5. 微分方程 $y' = 2xy$ 的通解为 $y = Ce^{x^2}$

6. 设需求函数 $Q_1 = \frac{1}{-200} P_1^{-\frac{3}{5}} P_2^{-\frac{2}{5}} Y^{\frac{5}{2}}$, 其中 P_1 为该商品的价格, P_2 是相关商品的价格, Y 是收入, 则需求的直接价格偏弹性等于 $-\frac{3}{5} \frac{P_1}{Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial P_1}$

二、选择题 (每小题 2 分, 共 12 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f'(a) = b, f'(b) = a$, 则定积分 $\int_a^b f'(x) f''(x) dx = (C)$ $\frac{1}{2} [f'(x)]^2 \Big|_a^b$

A. $a^2 - b^2$ B. $b^2 - a^2$ C. $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)$ D. $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

2. “函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微” 是 “函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的两个偏导数存在且连续” 的 (B) 条件.

A. 充分但非必要 B. 必要但非充分 C. 充分必要 D. 既非充分又非必要

3. 对于函数 $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$, 点 $(0, 4)$ (B).

- A. 不是驻点 B. 是驻点但不是极值点 C. 是极大值点 D. 是极小值点

4. 交换积分次序: $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = (A)$.

- A. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy$ B. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$
C. $\int_0^{\sqrt{y}} dx \int_0^1 f(x, y) dy$ D. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$



5. 下列级数收敛的是 (D).

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{1+n} \right)^n u_n \rightarrow \frac{1}{e}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right]$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

6. 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是 (A).

- A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛 B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛 D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

三、计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 计算定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{1+x^2} dx$

$$= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}$$

2. 计算定积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2-x} \cdot \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} \cdot \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3} (-\ln(2-x) + \ln(1+x)) \Big|_0^1 \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3} \ln \frac{1+x}{2-x} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

第 2 页 共 6 页

3. 计算反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^3} dx \\
 &= \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{\xi_1} x^{-3} dx + \lim_{\xi_2 \rightarrow 0^+} \int_{\xi_2}^1 x^{-3} dx \\
 &= \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^+} \left. -\frac{1}{2} x^{-2} \right|_{-1}^{\xi_1} + \lim_{\xi_2 \rightarrow 0^+} \left. -\frac{1}{2} x^{-2} \right|_{\xi_2}^1 \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

4. 设 $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy + y(x+y)}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)_y = 0$$

5. 设函数 $u = f(x, y, z)$ 可微, 并且函数 $y = y(x), z = z(x)$ 分别由下列两式确定:

$$e^{xy} - xy = 2, \quad e^z = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$$

求全导数 $\frac{du}{dx}$.

$$\text{设 } F(x, y) = e^{xy} - xy - 2, \quad G(x, z) = e^z - \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{ye^{xy} - y}{xe^{xy} - x} = -\frac{y}{x}$$

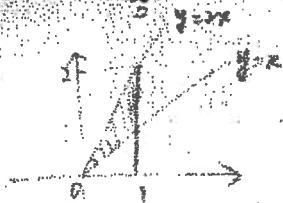
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{G_x}{G_z} = -\frac{e^x}{\frac{\sin z}{z}} = -\frac{z \cdot e^x}{\sin z}$$

第 3 页 共 6 页

$$\frac{du}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx} + f_z \frac{dz}{dx} = f_x - f_y \cdot \frac{y}{x} - f_z \cdot \frac{z \cdot e^x}{\sin z}$$

四、计算题 (每小题 8 分, 共 24 分)

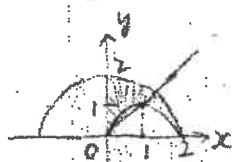
1. 计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=2x$ 及 $x=1$ 所围成的平面区域.



$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_x^{2x} xy dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} xy^2 \Big|_x^{2x} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

2. 计算 $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, 其中 D 由曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}, y=\sqrt{4-x^2}$ 及 y 轴围成.



$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 2\cos\theta \leq r \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{r \sin \theta}{r} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 r \sin \theta dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta - 1) d\cos \theta = 2 \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n}$ 的收敛半径、收敛域及和函数 $S(x)$.

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{(n+2) \cdot 2^{n+1}}} = 2$$

$$\left. \begin{aligned} x = -2 \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2}{n+1} &\text{ 收敛} \\ x = 2 \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n+1} &\text{ 发散} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{收敛域为 } [-2, 2)$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n}$$

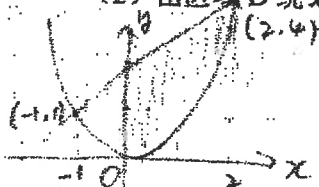
$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x S'(t) dt + S(0) = \int_0^x \frac{2}{2-t} dt = -2 \ln(2-t) \Big|_0^x \\ &= -2 \ln(2-x) + 2 \ln 2 \\ &\quad (-2 \leq x < 2) \end{aligned}$$

五、(本题 9 分) 由抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = x + 2$ 围成了平面区域 D.

求: (1) 区域 D 的面积;

(2) 由区域 D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积 V .



$$\text{交点 } \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \text{ 为 } (2, 4), (-1, 1)$$

$$(1) S_D = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned} (2) V_x &= \pi \int_{-1}^2 (x+2)^2 dx - \pi \int_{-1}^2 x^4 dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 (x^2 + 4x + 4 - x^4) dx = \frac{72}{5} \end{aligned}$$

六、(本题 9 分)

设生产某种产品的产量 Q (单位: 吨) 与所用两种原料 A, B 的数量 x, y 之间有关系式

$$Q(x, y) = 0.005x^2y.$$

现欲用 150 万元购原料, 已知 A, B 原料的单价分别为 1 万元/吨、2 万元/吨, 问购进两种原料各多少, 可使生产的产品产量最多?

$$\text{设 } F(x, y, \lambda) = Q(x, y) + \lambda(x + 2y - 150)$$

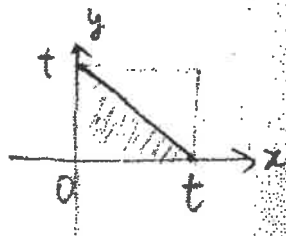
$$\begin{cases} F_x = 0.01xy + \lambda = 0 \\ F_y = 0.005x^2 + 2\lambda = 0 \\ F_\lambda = x + 2y - 150 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 25 \end{cases}$$

此时产量最多

七. (本题4分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内有连续的导数, $f(0)=1$, 且

$$\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f(t) dx dy,$$

其中 $D_t = \{(x,y) | 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, x+y \leq t\}$ ($0 < t < 1$), 求 $f(x)$ 的表达式.



$$\int_0^t dx \int_0^{t-x} f'(x+y) dy = f(t) \cdot S_{D_t}$$

$$\int_0^t f(x+y) \Big|_0^{t-x} dx = \frac{1}{2} t^2 \cdot f(t)$$

$$\int_0^t [f(t) - f(x)] dx = \frac{1}{2} t^2 f(t)$$

$$f(t) \cdot t - \int_0^t f(x) dx = \frac{1}{2} t^2 f(t)$$

两边对 t 求导

$$f(t) + t f'(t) - f(t) = t f(t) + \frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

$$(2-t) f'(t) = 2 f(t)$$

$$f(t) \neq 0 \text{ 时 } \int \frac{1}{f(t)} df(t) = \int \frac{2}{2-t} dt + C$$

$$f(t) = C (2-t)^{-2}$$

$$\text{由 } f(0)=1 \Rightarrow C=4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{(2-x)^2}$$

高等数学 2B

课程号: 11020044B 课序号: 开课学院: 数学与数量经济学院

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
题分	10	10	20	35	10	10	5	100
得分								
评阅人								

一、填空题 (本题 10 分, 每小题 2 分)

1. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 3^x , 则 $\int f(x)dx = 3^x + C$ 2. $\frac{d}{dx} \left(\int_x^e e^t dt \right) = -e^x \cdot \frac{1}{x}$ 3. 设 $z = y^x$, 则全微分 $dz = y^x \ln y dx + x y^{x-1} dy$ 4. 将函数 $\ln(1-2x)$ 展开成麦克劳林级数: $-2x - \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^3}{3} - \dots - \frac{(2x)^n}{n} - \dots$ 5. 微分方程 $yy' + xe^y = 0$ 的通解为 $yy' = -xe^y \Rightarrow \int \frac{y dy}{e^y} = \int -x dx \Rightarrow -ye^y + e^y = -\frac{1}{2}x^2 + C$

二、单项选择题 (本题 10 分, 每小题 2 分)

1. 下列结论正确的是 (A).

(A) 积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ (B) 积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -2$ $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ (C) 积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$ (D) 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$ 2. 对于函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, 点 $(0, 0)$ (C).

(A) 是驻点但不是极值点

(B) 是驻点也是极值点

(C) 不是驻点但是极值点

(D) 不是驻点也不是极值点

3. 设 $M = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$, $N = \int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$, $P = \int_{-1}^1 (x^3 - 1) dx$,

则有不等式 (B).

(A) $M < N < P$ (B) $P < N < M$ (C) $N < P < M$ (D) $M < P < N$

4. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定, 且 $F'_x = 1, F'_y = 2, \frac{\partial z}{\partial x} = 3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = (A)$:

(A) 6 (B) -6 (C) $\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{2}{3}$ $\therefore -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{F_z} = 3$ $F_z = -\frac{1}{3}$

5. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$ 的敛散性为 (B)。

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 无法判别

三、计算题（本题 20 分，每小题 5 分）

三、计算题 (本题 20 分, 每小题 5 分)

1. 求不定积分 $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int \arctan x d\arctan x = \frac{1}{2} \arctan^2 x + C$

$$2. \text{ 求不定积分 } \int x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int x d e^{-2x} = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\ = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

3. 求定积分 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} dx$

$$\frac{1}{2} \quad \sqrt{x+1} = t \quad x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt$$
$$7x^2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2+dt}{t+t^3} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \arctan t \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$$

4. 判别正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ 的敛散性

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1 \text{ 发}$$

四、简答题 (本题 35 分, 每小题 7 分)

1. 设函数 $z = f(x^2 + y^2)$ 满足 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1$, 其中 f 可微, 求 $f'(t)$ 及 $f(t)$ 的表达式.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2 + y^2) \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x^2 + y^2) \cdot 2y$$

$$2x^2 f'(x^2 + y^2) + 2y^2 f'(x^2 + y^2) = 1$$

$$f'(x^2 + y^2) = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \quad \therefore f'(t) = \frac{1}{2t}$$

$$f(t) = \int \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + C$$

2. 由方程 $z^5 - 5xyz = e^x$ 确定了函数 $z = f(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

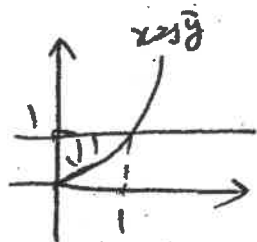
$$F(x, y, z) = z^5 - 5xyz - e^x$$

$$F_x = -5yz, \quad F_y = -5xz, \quad F_z = 5z^4 - 5xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^4 - xy}$$

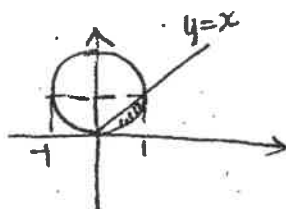
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (z^4 - xy) - yz(4z^3 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y)}{(z^4 - xy)^2} \\ &= \frac{y^2 z^5 - yz(4z^4 - \frac{y^2}{z})}{(z^4 - xy)^2} \end{aligned}$$

3. 计算二重积分 $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx dy$, 其中 D 由直线 $y=1$, $x=0$ 和曲线 $x=\sqrt{y}$ 围成.



$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx &= \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}} \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\sqrt{y}} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}} dy = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{d(1+y^3)}{\sqrt{1+y^3}} = \frac{1}{3} \sqrt{1+y^3} \Big|_0^1 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

4. 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$, 其中 D 是由 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 和直线 $y=x$ 所围成的、位于直线 $y=x$ 下方的区域.



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y &= 0 \\ r &= 2 \sin \theta \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^2 \cos \theta dr &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \cdot \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{2 \sin \theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \cdot \frac{8}{3} \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径, 收敛域及和函数.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1. \quad x=1 \text{ 时 } \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ 收敛. } x=-1 \text{ 时 } \sum \frac{1}{n} \text{ 发}$$

$x \in (-1, 1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

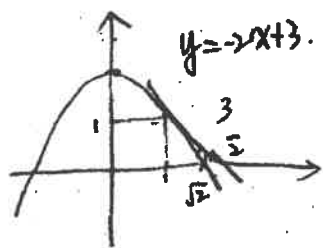
$$S'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x}$$

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \quad \text{第4页共6页} \quad S(0)=0. \quad = \ln(1+t) \Big|_0^x = \ln(1+x). \quad \forall -1 < x \leq 1.$$

五、(本题 10 分) 过抛物线 $y=2-x^2$ 在第一象限内的点 $(1,1)$ 作切线 L , 抛物线及切线 L 与 x 轴围成的区域记为 D .

(1) 求 D 的面积 S ;

(2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V_y .



$$S = \int_0^1 \left(-\frac{y-3}{2} - \sqrt{2-y} \right) dy = \frac{23}{12} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{1}{4} - \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2) dx = \frac{1}{4} - 2(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{23}{12} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$V_y = \pi \int_0^1 \left[\frac{(y-3)^2}{4} - (2-y) \right] dy = \frac{\pi}{12}$$

$$V_x = \pi \int_1^{\frac{3}{2}} (-2x+3)^2 dx - \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2)^2 dx$$

六、(本题 10 分) 设生产函数和成本函数分别为

$$Q = f(K, L) = 6K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}, \quad C = P_K K + P_L L = 24K + 2L$$

产品价格 $p=8$.

(1) 两种要素 K, L 投入量为多少时, 利润最大? 最大利润为多少?

(2) 当预算 $C_0 = 2000$ 时, 两种要素 K, L 投入量为多少才能使利润最大? 最大利润为多少?

$$\pi(K, L) = 48K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24K - 2L$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial K} = 24K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24 = 0 & \text{①} \\ \frac{\partial \pi}{\partial L} = 16K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}} - 2 = 0 & \text{②} \end{cases}$$

$$\frac{L}{K} = 8, \quad L = 8K$$

$$\text{代入 ①, } K = 64, \quad L = 512$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} = -12K^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{3}}$$

第 5 页 共 6 页

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} = 8K^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} = -\frac{32}{3}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{5}{3}}$$

$$H^2 - A_c < 0, \quad A < 0, \quad \therefore \text{极大值}$$

$$(2) \quad F(K, L, \lambda) = 48K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} + \lambda(24K + 2L - 2000)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial K} = 24K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} + 24\lambda = 0 & \text{①} \\ \frac{\partial F}{\partial L} = 16K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}} + 2\lambda = 0 & \text{②} \end{cases}$$

七、(本题 5 分) 已知连续函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x) = 2 \int_0^1 f(tx) dt + (x^2 + 1)$, 求 $f(x)$ 的表

达式。 令 $tx = u$, $t = 0 \rightarrow 1$, $u = 0 \rightarrow x$.

$$\int_0^1 f(tx) dt = \int_0^x f(u) \frac{1}{x} du = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$$

$$f(x) = \frac{2}{x} \int_0^x f(u) du + (x^2 + 1) \quad \text{两边对 } x \text{ 求导}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x f(u) du + \frac{f(x) \cdot x}{x^2}$$

$$x f'(x) = 2 \int_0^x f(u) du + f(x) \quad \text{两边对 } x \text{ 求导}$$

$$x f'(x) = f(x) + 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} f(x) + 3x + \frac{1}{x}$$

先求不定积分 $f'(x) = \frac{1}{x} f(x) + 3x + \frac{1}{x}$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln f(x) = \ln x + C \Rightarrow f(x) = Cx$$

设 $f(x) = C(x) \cdot x$ 是初等函数。 $f'(x) = C'(x) \cdot x + C(x) = \frac{x C'(x)}{x} + 3x + \frac{1}{x}$

$$C'(x) \cdot x = 3x + \frac{1}{x}$$

$$C'(x) = 3 + \frac{1}{x^2}$$

$$C(x) = 3x - \frac{1}{x} + C$$

$$\therefore f(x) = (3x - \frac{1}{x} + C) x = 3x^2 - 1 + Cx$$

初值条件 $f(0) = -1$

$\therefore C = 0$

高等数学 2B

课程号: 11020044B 课序号: 01—13 开课学院: 数学与数量经济学院

一、填空题 (本题 10 分, 每小题 2 分)

1. $3^x + C$ 2. $-\frac{e^x}{2\sqrt{x}}$ 3. $y^x \ln y dx + xy^{x-1} dy$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$ 5. $e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C$

二、单项选择题 (本题 10 分, 每小题 2 分)

A C B D B

三、计算题 (本题 20 分, 每小题 5 分)

1. $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} d \ln x \dots\dots\dots 2'$
 $= \ln |\ln x| + C \dots\dots\dots 3'$

2. $\int x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int x d e^{-2x} \dots\dots\dots 3'$
 $= -\frac{1}{2} (x e^{-2x} - \int e^{-2x} dx) = -\frac{1}{4} (1 + 2x) e^{-2x} + C \dots\dots\dots 3'$

3. 设 $t = \sqrt{x+1}$, 则 $x = t^2 - 1$

$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t+t^3} dt \dots\dots\dots 2'$
 $= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan t \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots 3'$

4. 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^{n+1}} \dots\dots\dots 2'$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

故原级数发散 $\dots\dots\dots 3'$

注: 本标准答案只需填写试题答案, 无需填写试题内容。

第 1 页 共 5 页

四、简答题 (本题 35 分, 每小题 7 分)

1. 解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'(x^2 + y^2)$

所以 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)f'(x^2 + y^2) = 1$

于是 $f'(x^2 + y^2) = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \dots\dots\dots 3'$

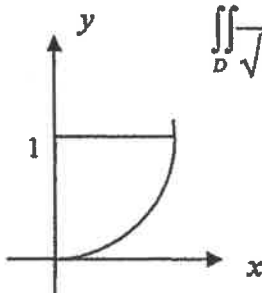
设 $u = x^2 + y^2$

得 $f'(u) = \frac{1}{2u} \dots\dots\dots 2'$
 $f(u) = \frac{1}{2} \ln|u| + C \dots\dots\dots 2'$ } 4'

2. 解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy} \dots\dots\dots 3'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (z^2 - xy) - yz \left(2z \frac{\partial z}{\partial x} - y \right)}{(z^2 - xy)^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3} \dots\dots\dots 4'$

3. 解 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$

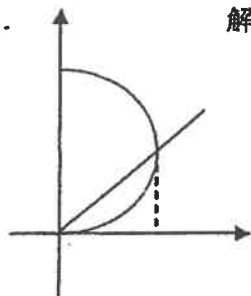


$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{y}{\sqrt{1+y^3}} x dx \dots\dots\dots 3'$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}} dy$

$= \frac{1}{3} \sqrt{1+y^3} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}-1}{3} \dots\dots\dots 4'$

4.



解 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \right\}$

$$\iint_D x dx dy = \iint_D r^2 \cos \theta dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^2 \cos \theta dr \dots\dots\dots 3'$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{6} \dots\dots\dots 4'$$

5. 解 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$

当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散; 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛

所以收敛域为 $(-1, 1]$ 3'

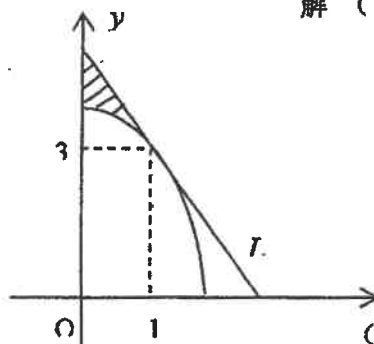
设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, 则 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$

故 $S(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1]$ 4'

五、(本题 10 分)

解 (1) 切线: $y = -2x + 5$

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^1 [(-2x+5) - (4-x^2)] dx \\ &= \left(-x^2 + x + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 5' \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (2) V_x &= \pi \int_0^1 [(-2x+5)^2 - (4-x^2)^2] dx \\ &= \pi \left(-\frac{x^5}{5} + 4x^3 - 10x^2 + 9x \right) \Big|_0^1 = \frac{14}{5}\pi \dots\dots\dots 5' \end{aligned}$$

注: 本标准答案只需填写试题答案, 无需填写试题内容。

第 3 页 共 5 页

六、(本题 10 分)

解 利润函数 $\pi = pQ - C = 48K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24K - 2L$

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial K} = 24K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial L} = 16K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}} - 2 = 0 \end{cases}, \text{得驻点} \begin{cases} K = 64 \\ L = 512 \end{cases} \dots\dots\dots 3'$$

$$\text{因为 } \frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} = -12K^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} = 8K^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} = -\frac{32}{3}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{5}{3}}$$

$$\text{于是 } B^2 - AC = -64K^{-1}L^{-\frac{4}{3}} < 0, \text{ 且 } A < 0 \dots\dots\dots 2'$$

所以, 当 $K = 64, L = 512$ 时, 利润最大。

$$(2) \text{ 因 } 24 \times 64 + 2 \times 512 = 2560 > 2000$$

所以求 $\pi = pQ - C = 48K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24K - 2L$ 满足 $24K + 2L = 2000$ 的极值

$$\text{设 } F(K, L, \lambda) = 48K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24K - 2L + \lambda(24K + 2L - 2000) \dots\dots\dots 2'$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial K} = 24K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24 + 24\lambda = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial L} = 16K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}} - 2 - 2\lambda = 0 \\ 24K + 2L = 2000 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} K = 50 \\ L = 400 \end{cases} \dots\dots\dots 3'$$

所以, 当 $K = 50, L = 400$ 时, 利润最大

七、(本题 5 分)

解 方程两边同时对 x 求导,

$$f'(x) = 3f(x) + e^x, \text{ 即 } f'(x) - 3f(x) = e^x \dots\dots\dots 2'$$

$$f(x) = e^{\int 3dx} \left(\int e^x e^{-\int 3dx} dx + C \right) = e^{3x} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) \dots\dots\dots 2'$$

利用 $f(0) = 1$, 得 $C = \frac{3}{2}$, 于是 $f(x) = e^{3x} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{3}{2} \right)$

高等数学 2A

课程号: 11020044A 课序号: 1-3 开课学院: 数学与数量经济学院

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
题分	10	10	20	35	10	10	5	100
得分								
评阅人								

一、填空题 (本题 10 分, 每小题 2 分)

1. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 2^x , 则 $\int f(x)dx = 2^x + C$
2. $\frac{d}{dx} \left(\int_x^2 e^{-t^2} dt \right) = -e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x}$
3. 设 $z = x^y$, 则全微分 $dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$
4. 将函数 $\ln(1 - \frac{x}{2})$ 展开为麦克劳林级数: $-\frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2 - \frac{1}{3}(\frac{x}{2})^3 - \dots = -\frac{x^n}{n 2^n}$
5. 微分方程 $yy' + e^{x-y} = 0$ 的通解为 $y e^y - e^y = -e^x + C$

二、单项选择题 (本题 10 分, 每小题 2 分)

1. 下列结论正确的是 (B).

(A) 积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -2$

(B) 积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}$

(C) 积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$

(D) 积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \sin 2x dx = 0$

2. 对于函数
- $f(x, y) = xy$
- , 点
- $(0, 0)$
- (A).

(A) 是驻点但不是极值点

(B) 是驻点也是极值点

(C) 不是驻点但是极值点

(D) 不是驻点也不是极值点

3. 设 $M = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $N = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$, $P = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin x - 1) dx$,

则有不等式 (C).

(A) $M < N < P$

(B) $P < N < M$

(C) $N < P < M$

(D) $M < P < N$

4. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定, 且 $F'_x = xy, F'_y = xe^y, \frac{\partial z}{\partial x} = y$,

则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ (D).

- (A) $-\frac{e^y}{y}$ (B) $\frac{e^y}{y}$ (C) $-e^y$ (D) e^y

5. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ 的敛散性为 (C).

- (A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 无法判别

三、计算题 (本题 20 分, 每小题 5 分)

1. 求不定积分 $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin x d \arcsin x = \frac{1}{2} \arcsin^2 x + C$

2. 求不定积分 $\int x e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int x d e^{-3x} = -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx$
 $= -\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C$

3. 求定积分 $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{(x-1)^3}} dx$

$$\sqrt{x-1} = t, \quad x = t^2 + 1 \quad dx = 2t dt$$

$$x: 2 \rightarrow 4, \quad t: 1 \rightarrow \sqrt{3}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t+t^3} dt = 2 \arctan t \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

4. 判别正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ 的敛散性

四、简答题（本题 35 分，每小题 7 分）

1. 设函数 $z = f(x^2 - y^2)$ 满足 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1$, 其中 f 可微, 求 $f'(t)$ 及 $f(t)$ 的表达式。

2. 由方程 $z^3 - 3xyz = e^3$ 确定了函数 $z = f(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

3. 计算二重积分 $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+x^3}} dx dy$, 其中 D 由直线 $x=1$, $y=0$ 和曲线 $y=\sqrt{x}$ 围成。

4. 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 和直线 $y=x$, $y=0$ 所围成的区域。

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n$ 的收敛半径、收敛域及和函数。

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \quad x = \pm \sqrt{2} \sqrt{n}, \text{ 收敛域 } (-1, 1)$$

$$S(x) = -2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \quad S(0) = 0$$

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x -2t dt + \int_0^x 3t^2 dt - \int_0^x 4t^3 dt + \dots$$

$$= -x^2 + x^3 - x^4 + \dots = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\therefore S(x) = \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)' = \frac{2x(1+x^2) - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

五、(本题 10 分) 过抛物线 $y = 2 - x^2$ 在第一象限内的点 $(1,1)$ 作切线 L ，抛物线及切线 L 与 x 轴围成的区域记为 D 。

(1) 求 D 的面积 S ；

(2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V_y 。

六、(本题 10 分) 设生产函数和成本函数分别为

$$Q = f(K, L) = 6K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}, \quad C = P_K K + P_L L = 24K + 2L$$

产品价格 $p = 8$ 。

(1) 两种要素 K, L 投入量为多少时, 利润最大? 最大利润为多少?

(2) 当预算 $C_0 = 2000$ 时, 两种要素 K, L 投入量为多少才能使利润最大? 最大利润为多少?

七、(本题 5 分) 已知连续函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x) = 2 \int_0^1 f(tx) dt + (x^2 + 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式。

高等数学 2A

课程号: 11020044A 课序号: 01-03 开课学院: 数学与数量经济学院

一、填空题 (本题 10 分, 每小题 2 分)

1. $2^x + C$ 2. $-\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$ 3. $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$ 5. $e^y = -e^x + C$

二、单项选择题 (本题 10 分, 每小题 2 分)

B A B D C

三、计算题 (本题 20 分, 每小题 5 分)

1. $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} d \ln x \dots\dots\dots 2'$
 $= \ln |\ln x| + C \dots\dots\dots 3'$
2. $\int x e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int x d e^{-3x} \dots\dots\dots 3'$
 $= -\frac{1}{3} (x e^{-3x} - \int e^{-3x} dx) = -\frac{1}{9} (1 + 3x) e^{-3x} + C \dots\dots\dots 3'$
3. 设 $t = \sqrt{x-1}$, 则 $x = t^2 + 1$
 $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{(x-1)^3}} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t+t^3} dt \dots\dots\dots 2'$
 $= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan t \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots 3'$
4. 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^{n+1}} \dots\dots\dots 2'$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$
 故原级数发散 $\dots\dots\dots 3'$

注: 本标准答案只需填写试题答案, 无需填写试题内容。

第 1 页 共 5 页

四、简答题 (本题 35 分, 每小题 7 分)

1. 解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'(x^2 - y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'(x^2 - y^2)$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 - y^2)f'(x^2 - y^2) = 1$

于是 $f'(x^2 - y^2) = \frac{1}{2(x^2 - y^2)} \dots\dots\dots 3'$

设 $u = x^2 - y^2$

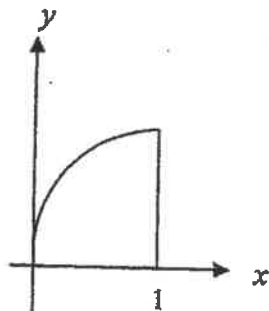
得 $f'(u) = \frac{1}{2u} \dots\dots\dots 2'$

$f(u) = \frac{1}{2}\ln|u| + C \dots\dots\dots 2'$ } 4'

2. 解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy} \dots\dots\dots 3'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y\frac{\partial z}{\partial x} \cdot (z^2 - xy) - yz \left(2z\frac{\partial z}{\partial x} - y \right)}{(z^2 - xy)^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3} \dots\dots\dots 4'$

3. 解 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

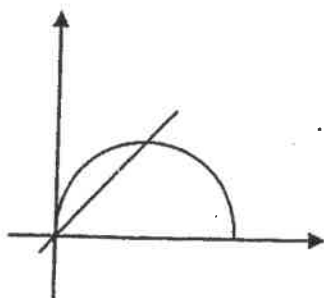


$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+x^3}} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} \frac{xy}{\sqrt{1+x^3}} dy \dots\dots\dots 3'$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$

$= \frac{1}{3} \sqrt{1+x^3} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}-1}{3} \dots\dots\dots 4'$

4.



解 $D = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2\cos\theta\}$

$\iint_D x dx dy = \iint_D r^2 \sin\theta dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 \sin\theta dr \dots\dots\dots 3'$

$= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \cos^3\theta d\theta = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 4'$

第 2 页 共 5 页

5. 解 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$

当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$ 发散; 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)$ 发散

所以收敛域为 $(-1, 1)$ 3'

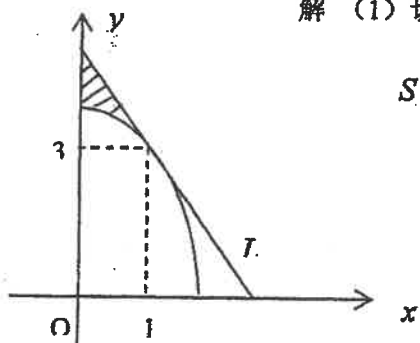
设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n$,

则 $\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} = -\frac{x^2}{1+x}$

故 $S(x) = \left(-\frac{x^2}{1+x} \right)' = -\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$, $x \in (-1, 1)$ 4'

五、(本题 10 分)

解 (1) 切线: $y = -2x + 5$



$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^1 [(-2x+5) - (4-x^2)] dx \\ &= \left(-x^2 + x + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \text{5'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) V_x &= \pi \int_0^1 [(-2x+5)^2 - (4-x^2)^2] dx \\ &= \pi \left(-\frac{x^5}{5} + 4x^3 - 10x^2 + 9x \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{14}{5} \pi \text{5'} \end{aligned}$$

注: 本标准答案只需填写试题答案, 无需填写试题内容。

第 3 页 共 5 页

六、(本题 10 分)

解 利润函数 $\pi = pQ - C = 48K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24K - 2L$

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial K} = 24K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial L} = 16K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}} - 2 = 0 \end{cases}, \text{得驻点} \begin{cases} K = 64 \\ L = 512 \end{cases} \dots\dots\dots 3'$$

$$\text{因为 } \frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} = -12K^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{3}}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} = 8K^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} = -\frac{32}{3}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{5}{3}}$$

$$\text{于是 } B^2 - AC = -64K^{-1}L^{-\frac{4}{3}} < 0, \text{ 且 } A < 0 \dots\dots\dots 2'$$

所以, 当 $K = 64, L = 512$ 时, 利润最大.

(2) 因 $24 \times 64 + 2 \times 512 = 2560 > 2000$

所以求 $\pi = pQ - C = 48K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24K - 2L$ 满足 $24K + 2L = 2000$ 的极值

$$\text{设 } F(K, L, \lambda) = 48K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24K - 2L + \lambda(24K + 2L - 2000) \dots\dots\dots 2'$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial K} = 24K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 24 + 24\lambda = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial L} = 16K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}} - 2 - 2\lambda = 0 \\ 24K + 2L = 2000 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} K = 50 \\ L = 400 \end{cases} \dots\dots\dots 3'$$

所以, 当 $K = 50, L = 400$ 时, 利润最大

七、(本题 5 分)

解 方程两边同时对 x 求导,

$$f'(x) = 3f(x) + e^x, \text{ 即 } f'(x) - 3f(x) = e^x \dots\dots\dots 2'$$

$$f(x) = e^{\int 3dx} \left(\int e^x e^{-\int 3dx} dx + C \right) = e^{3x} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) \dots\dots\dots 2'$$

利用 $f(0)=1$, 得 $C=\frac{3}{2}$, 于是 $f(x)=e^{3x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{3}{2}\right)\dots\dots\dots 1'$

注：本标准答案只需填写试题答案，无需填写试题内容。

第 5 页 共 5 页

高等数学（下）A

课程号： 11220174 课序号： 01-10,12,13 开课学院： 数学学院

题号	一	二	三	四	五	六	总分
题分	10	10	30	32	8	10	100
得分							
评阅人							

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $F(x) = \int_0^{x^2} \ln t^2 dt$, 则 $F'(e) = (\quad)$.

- A. 2 B. 4 C. $4e$ D. $8e$

2. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{\cos x}) dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则 $(\quad)$.

- A. $M > N > K$ B. $M > K > N$ C. $K > M > N$ D. $N > M > K$

3. 设某商品的需求函数为 $Q_1 = \frac{1}{200} P_1^{-\frac{3}{8}} P_2^{-\frac{2}{5}} Y^{\frac{5}{2}}$, 其中 P_1 是该商品的价格, P_2 是相关商品的价格, Y 是收入, 则需求量 Q_1 的收入偏弹性为 $(\quad)$.

- A. 0.5 B. 1.5 C. 2.5 D. 5

4. 瑕积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$ 的结果为 $(\quad)$.

- A. 收敛于 -1 B. 收敛于 0 C. 收敛于 1 D. 发散

5. 二阶微分方程 $y'' + y = \sin x$ 的通解为 $(\quad)$. (以下 C_1, C_2, C_3 均为任意常数)

- A. $y = \cos x + \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$ B. $y = C_1 \cos x + \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$
 C. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$ D. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - C_3 x \cos x$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 定积分 $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx =$ _____.

2. 反常积分 $\int_5^{+\infty} \frac{1}{(x-4)^2} dx =$ _____.

3. 设函数 $f(x, y)$ 有一阶连续偏导数, 现已知 $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$, 且 $f(0, 0) = 0$, 则 $f(x, y) =$ _____.

4. 设函数 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1, -1)$ 取得极值, 则常数 $a =$ _____.

5. 设 D 为区域: $|x| + |y| \leq 1$, 则 $\iint_D dx dy =$ _____.

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 计算定积分 $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

2. 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} e^{2x} \cdot \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$

3. 设函数 $z = x^y$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. ($x > 0$)

4. 设函数 $z = f(x, \frac{y}{x}, xy)$ ，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

5. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $\ln z + e^{z-1} = xy$ 确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2, \frac{1}{2})}$

四、解答题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$ ，其中 D 是由抛物线 $y = 2 - x^2$ 与直线 $y = x$ 所围成的平面区域.

2. 计算二重积分 $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$ ，其中 D 为平面区域 $x^2 + y^2 \leq \pi$ 在第一象限的部分.

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n!}{n^n}$ 的敛散性：是条件收敛、绝对收敛还是发散？

4. 求微分方程 $y' + \frac{x}{2(1-x^2)}y = \frac{1}{2}x$ 满足条件 $y(0) = \frac{2}{3}$ 的特解.

五、（本题 8 分）设平面图形 D 由曲线 $y = \frac{3}{x}$ 和 $x + y = 4$ 围成.

- (1) 求图形 D 的面积;
- (2) 求图形 D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

六、（本题 10 分）已知某消费者每年消费商品 1 和商品 2 的数量分别为 X_1 和 X_2 ，两种商品的总支出为 720 元，两种商品的价格分别为 $P_1 = 20$ 元, $P_2 = 30$ 元, 该消费者的效用函数为 $U = 3X_1X_2^2$. 该消费者每年购买这两种商品的数量各是多少时，才能使效用最大化？

高等数学 (下) A

课程号: 11220174 课序号: 01-10, 12, 13 开课学院: 数学学院

一、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

D C C D C

二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. $\frac{\pi^2}{2}$ 2. 1 3. $2\pi x^2$ 4. -5 5. 2

三、计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 原式 = $\frac{1}{2}(\ln x)^2 \Big|_1^e$ 3 分

= $\frac{1}{2}$ 3 分

2. 设 $u = \sqrt{x^2 - 1}$, 则 $x = \ln(u^2 + 1)$

原式 = $\int_0^1 2u(u^2 + 1) \cdot \arctan u du$ 3 分

= $\frac{1}{2} \int_0^1 \arctan u d(u^2 + 1)^2$

= $\frac{1}{2} (u^2 + 1)^2 \arctan u \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (u^2 + 1) du$

= $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$ 3 分

3. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ 3 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$ 3 分

= $x^{y-1} (1 + y \ln x)$

$$4. \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} f_2 + x f_3 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} f_{22} + 2f_{23} + x^2 f_{33} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$5. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{1+ze^{x-1}} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x=2, y=\frac{1}{2} \text{ 时, } z=1 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2, \frac{1}{2})} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

四、解答题 (每小题 8 分, 共 32 分)

$$\begin{aligned} 1. \text{原式} &= \int_{-2}^1 dx \int_1^{1-x^2} x dy \\ &= \int_{-2}^1 x(2-x^2-x) dx \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \\ &= \left(x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-2}^1 \\ &= -\frac{9}{4} \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{原式} &= \iint_D r \sin r^2 dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r \sin r^2 dr \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \\ &= -\frac{\pi}{4} \cos r^2 \Big|_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \text{ 收敛, 故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n!}{n^n} \text{ 绝对收敛} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

4. 通解 $y = -\frac{1}{3}(1-x^2) + C(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ 4 分

利用 $y(0) = \frac{2}{3}$, 得 $C=1$

特解 $y = -\frac{1}{3}(1-x^2) + (1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ 4 分

五、(本题 8 分)

(1) 交点 $(1,3)$, $(3,1)$

$$S = \int_1^3 \left(4-x - \frac{3}{x} \right) dx$$

$$= 4 - 3 \ln 3 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) $V_1 = \pi \int_1^3 \left[(4-x)^2 - \frac{9}{x^2} \right] dx$

$$= \frac{8}{3} \pi \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

六、(本题 10 分)

设 $F = 3X_1 X_2^2 + \lambda(20X_1 + 30X_2 - 720)$ 4 分

得方程组

$$\begin{cases} 3X_2^2 + 20\lambda = 0 \\ 6X_1 X_2 + 30\lambda = 0 \\ 20X_1 + 30X_2 = 720 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

解得 $X_1 = 12, X_2 = 16$ 2 分

因为驻点唯一, 所以当消费者每年购买这两种商品的数量为 $X_1 = 12, X_2 = 16$ 时效用最大

高等数学 2A

课程号: 11020044A

课序号: 01,11,15,18

开课学期:

数学学院

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
题分	10	10	24	12	8	10	6	100
得分								
评阅人								

一、选择题 (每小题 2 分, 计 10 分)

1. 定积分 $\int_{-1}^1 [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - 1] dx = (\quad)$.

A. -1

B. -2

C. 2

D. 0

2. 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 的敛散性为 ().

A. 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散B. 当 $p \geq 1$ 时收敛, 当 $p < 1$ 时发散C. 当 $p < 1$ 时收敛, 当 $p \geq 1$ 时发散D. 当 $p > 0$ 时收敛, 当 $p \leq 0$ 时发散

3. 设需求函数 $Q_1 = 12 - 4P_1 + 3P_2$, $Q_2 = 16 + 2P_1 - 4P_2$, 当 $P_1 = 2, P_2 = 4$ 时, 需求量 Q_1 的交叉价格的弹性为 ().

A. 0.5

B. -0.5

C. 0.75

D. -0.75

4. 对于函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, 下列结论正确的是 ().

A. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 连续但不可微B. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 连续且可微C. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续但可微D. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续且不可微

5. 下列无穷级数中, 条件收敛的是 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{e}\right)^n$

二、填空题 (每小题 2 分, 计 10 分)

1. 若 $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t} dt$, 则 $F'(x) =$ _____

2. 设函数 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1, -1)$ 取得极值, 则系数 $a =$ _____

3. 设函数 $z = (x^2 - 2x)(y^2 - 2y)$, 则 $dz|_{(1,1)} =$ _____

4. 已知 $\int_0^1 f(t) dt = 1$, 则 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x^2 + y^2) dx dy =$ _____

5. 微分方程 $y' + 2y = e^{-x}$ 的通解为 $y =$ _____

三、计算题 (每小题 6 分, 计 24 分)

1. 计算定积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sec x \cdot \tan x dx$

2. 计算定积分 $\int_0^e \sin \sqrt{x} dx$

3. 设 $z = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4. 设 $z = f(xy, xy^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四、解答题 (每小题 8 分, 计 32 分)

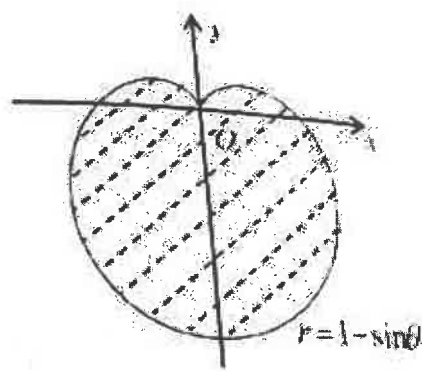
1. 设函数 $z = f(x, y)$ 是由方程 $xyz = \arctan(x + y + z)$ 在 $(0, 1, -1)$ 点确定的隐函数,

求 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0, 1, -1)}$ 和 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0, 1, -1)}$.

2. 计算二重积分 $\iint_D \frac{y^3}{(1+x^2-y^2)^2} dx dy$, 其中 D 由抛物线 $y = \sqrt{x}$, x 轴及直线 $x=1$ 围成.

3. 讨论无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的敛散性

4. 求由心形线 $r = 1 - \sin \theta$ 所围成的图形的面积.



五、(本题 8 分) 设曲线 $y = \ln x$ 与直线 $y = -1$, $y = 1$ 及 y 轴围成了平面图形 D, 求 D 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积.

六、(本题 10 分) 设生产函数 $Q = 8K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}$ (其中 K 为投入水平, L 为产出水平), 成本函数 $C = 8K + 4L$, 产品的价格 $p = 4$.

- (1) 求使利润 π 最大化的投入水平 K , 产出水平 L 及成本 C ;
- (2) 当预算成本 $C_0 = 240$ 时, 求使利润 π 最大化的投入水平 K 与产出水平 L .

2016—2017 学年第二学期高等数学 2A 考试试卷—A 卷

七、(本题 6 分) 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足方程 $\int_1^x f(t)dt = x^2 f(x) - 1$, 求 $f(x)$ 的表达式.

高等数学 2A

课程号: 11020044A 课序号: 01-13,15,16 开课学院: 数学学院

一、选择题 (每小题 2 分, 计 10 分)

B A C A A

二、填空题 (每小题 2 分, 计 10 分)

1. $2x\sqrt{1+x}$ 2. -5 3. $12dx+12dy$

4. π

5. $\frac{e^{-2x}(e^x+C)}{e^{-x}+Ce^{-2x}}$

三、计算题 (每小题 6 分, 计 24 分)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x \cdot \tan x dx = \sec x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \dots\dots\dots 3'$

$= 2 - \sqrt{2} \dots\dots\dots 3'$

2. 设 $t = \sqrt{x}$

原式 $= \int_0^{\pi} 2t \sin t dt \dots\dots\dots 3'$

$= -2t \cos t \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \cos t dt$

$= 2\pi \dots\dots\dots 3'$

3. $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + 1 \dots\dots\dots 3'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y} \dots\dots\dots 3'$

4. $\frac{\partial z}{\partial x} = y f_1'' + y^2 f_2'' \dots\dots\dots 3'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xy f_{11}'' + 3xy^2 f_{12}'' + 2xy f_{22}'' + f_1' + 2y f_2' \dots\dots\dots 3'$

四、解答题 (每小题 8 分, 计 32 分)

$$1. \text{ 因为 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - \frac{1}{1+(x+y+z)^2}}{xy - \frac{1}{1+(x+y+z)^2}}$$

$$\text{所以 } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,1,-1)} = -2 \dots\dots\dots 4'$$

$$\text{因为 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - \frac{1}{1+(x+y+z)^2}}{xy - \frac{1}{1+(x+y+z)^2}}$$

$$\text{所以 } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,1,-1)} = -1 \dots\dots\dots 4'$$

$$2. \text{ 原式} = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^3}{(1+x^2-y^2)^2} dy \dots\dots\dots 4'$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \left. \frac{1}{1+x^2-y^2} \right|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} (x - \arctan x) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \dots\dots\dots 4'$$

$$3. \text{ 因 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} x^2 \dots\dots\dots 2'$$

$$\text{当 } |x| < 1 \text{ 时 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n-1}}{2n-1} \text{ 收敛, 所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \text{ 也收敛}$$

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n-1}}{2n-1} \text{ 发散, 所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \text{ 也发散} \dots\dots\dots$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n-1} \text{ 发散,}$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \text{ 发散} \dots\dots\dots 2'$$

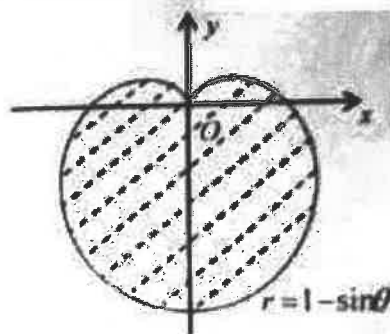
$$\text{综合, 当 } |x| < 1 \text{ 时 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \text{ 收敛, 当 } |x| \geq 1 \text{ 时 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \text{ 发散}$$

4. $S = \iint_D dx dy = \iint_D r dr d\theta \dots\dots\dots 4'$

$$= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{1-\sin\theta} r dr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1-\sin\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\pi \dots\dots\dots 4'$$



五、(本题 8 分)

$$V_x = \pi \int_{-1}^1 e^{2y} dy \dots\dots\dots 4'$$

$$= \frac{\pi}{2} (e^2 - e^{-2}) \dots\dots\dots 4'$$

六、(本题 10 分)

$$(1) \pi = 32K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}} - (8K + 4L)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial K} = 8K^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{2}} - 8 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial L} = 16K^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{1}{2}} - 4 = 0 \end{cases}$$

得驻点 $K = 16, L = 64$

又 $B^2 - AC < 0$ 且 $A < 0$

所以当 $K = 16, L = 64$ 时利润最大, 此时 $C = 384 \dots\dots\dots 5'$

$$(2) \text{ 设 } F = 32K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}} - \lambda(8K + 4L - 240)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial K} = 8K^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{2}} - 8\lambda = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial L} = 16K^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{1}{2}} - 4\lambda = 0 \\ 8K + 4L = 240 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 16K^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{1}{2}} - 4\lambda = 0$$

$$8K + 4L = 240$$

解得 $K = 10, L = 40 \dots\dots\dots 5'$

七、(本题 6 分)

方程两边对 x 求导, 得

$$f^3(x) = 2xf'(x) + x^2 f''(x) \dots\dots\dots 2'$$

$$\text{记 } y = f(x), \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x}$$

$$\text{设 } u = \frac{y}{x}, \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\text{于是 } \frac{du}{u^2 - 3u} = \frac{dx}{x}$$

$$\text{积分得 } \ln \frac{u-3}{u} = 3 \ln x \dots\dots\dots 3'$$

$$\text{代入得 } y = \frac{3x}{1 - Cx^3} \quad \frac{y-3}{\frac{y}{x}} = \frac{y-3x}{y} = Cx^3$$

由方程, 当 $x=1$ 时, $y=f(1)=1$, 所以 $C=-2$

$$\text{故 } f(x) = \frac{3x}{1+2x^3} \dots\dots\dots 4'$$

$$f(x) = \frac{3x}{1 \pm 2x^3}$$

高等数学 (下) A

课程号: 11220174
课程号: 71220174

课序号: 01-13 开课学院: 数学学院
课序号: 01 开课学院: 数学学院

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
题分	10	10	30	24	8	10	8	100
得分								
评阅人								

一、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设 $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt$, 则 $F'(x) = ()$.

- A. $\sqrt{1+x^4}$ B. $\sqrt{1+x^8}$ C. $2x\sqrt{1+x^4}$ D. $2x\sqrt{1+x^8}$

2. 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ()$.

- A. 0 B. π C. 2π D. ∞

3. 如果函数 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的偏导数存在, 则 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处 $()$.

- A. 必连续 B. 必可微分 C. 必有极限 D. 必有定义

4. 设 $f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则 $f_x(0, 0)$ 与 $f_y(0, 0)$ 的结果为 $()$.

- A. 都存在 B. 都不存在
C. $f_x(0, 0)$ 存在但 $f_y(0, 0)$ 不存在 D. $f_x(0, 0)$ 不存在但 $f_y(0, 0)$ 存在

5. 下列级数中, 属于条件收敛的是 $()$.

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n}$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 定积分 $\int_{-1}^1 (\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1) dx =$ _____.

2. 函数 $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$ 的定义域为 _____.

3. 设函数 $w = x + xy + xz$ ，则全微分 $dw =$ _____.

4. 设 A、B 两种商品的价格分别为 P_A 、 P_B ，需求函数 $Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$.

当 $P_A = 10$ ， $P_B = 20$ 时，A 商品对自身价格的需求弹性 $|\epsilon_A| =$ _____.

5. 设区域 D 为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ ，则二重积分 $\iint_D dx dy =$ _____.

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 计算定积分 $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 dx$

2. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} dx$

3. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.

4. 设函数 $z = f(\sin y - \sin x) + xy$, 其中 $f(u)$ 有二阶导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

5. 设函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$, 其中 $z = f(x, y)$ 是由方程 $e^z + xyz = 1$ 所确定的函数.

求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,0)}$.

四、解答题（每小题 8 分，共 24 分）

1. 计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$ ，其中 D 是由直线 $y=x$, $y=2x$ 及 $x=1$ 所围成的平面区域.

2. 计算二重积分 $\iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$ ，其中 D 是上半圆 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴所围成的部分.

3. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$ 的敛散性.

五、(本题 8 分) 曲线 $y = \ln x$ 与直线 $y = \ln a$, $y = \ln b$ (其中 $0 < a < b$) 及 y 轴围成了平

面图形 D .

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积.

六、(本题 10 分) 某厂家生产一种产品在两个市场销售, 售价分别为 p_1 和 p_2 , 销售量分别为 q_1 和 q_2 , 需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1, \quad q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(q_1 + q_2)$$

当价格分别为多少时才能使总利润最大? 最大利润是多少?

七、(本题 8 分) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零, 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成的区域的面积为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

高等数学(下) A

课程号: 11220174 课序号: 01-13 开课学院: 数学学院
 课程号: 71220174 课序号: 01 开课学院: 数学学院

一、选择题(每小题 2 分, 共 10 分)

D B D C A

二、填空题(每小题 2 分, 共 10 分)

1. 2 2. $x+y>0$ 3. $(1+y+yz)dx+(x+xz)dy+xydz$ 4. 0.4 5. 6π

三、计算题(每小题 6 分, 共 30 分)

1. 原式 $= \int_1^2 \left(x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 3\ln x + \frac{1}{2x^2} \right) \Big|_1^2$$

$$= 3\ln 2 - \frac{9}{8} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

2. 原式 $= 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^1 \frac{\arctan t}{1+t^2} dt \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$= (\arctan t)^2 \Big|_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^1$$

$$= \frac{5\pi^2}{144} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

3. 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \sin x \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

4. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\cos x f'(\sin y - \sin x) + y \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\cos x \cdot \cos y f''(\sin y - \sin x) + 1 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

5. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{xy^2}{e^x + xy}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - \frac{2xy^2}{e^x + xy}$ 3 分

当 $x=1, y=0$ 时, $z=0$

$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 2$ 3 分

四、解答题 (每小题 8 分, 共 24 分)

1. $\iint_D xy dx dy = \int_0^1 dy \int_1^{2y} xy dx$ 4 分

$= \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx$

$= \frac{3}{8}$ 4 分

2. 原式 $= \iint_D \cos \theta dr d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos \theta} \cos \theta dr$ 4 分

$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$

$= \frac{\pi}{2}$ 4 分

3. $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$

$= \frac{1}{2} < 1$ 4 分

所以级数收敛 4 分

五、（本题 8 分）

$$(1) S = \int_a^b e^x dy = b - a \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) V = \pi \int_a^b (e^x)^2 dy = \frac{\pi}{2} (b^2 - a^2) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

六、（本题 10 分）（注：本题 2 个给分点即可）

$$L = R - C$$

$$= -0.2p_1^2 + 32p_1 - 0.05p_2^2 + 12p_2 - 1395 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = -0.4p_1 + 32$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0.1p_2 + 12$$

$$\text{驻点 } p_1 = 80; p_2 = 120 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } A = -0.4, B = 0, C = -0.1, B^2 - AC < 0 \text{ 且 } A < 0 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以当 } p_1 = 80, p_2 = 120 \text{ 时利润最大, 最大利润为 } 605 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

七、（本题 8 分）（注：本题 2 个给分点即可）

$$\text{切线方程: } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{切线与 } x \text{ 轴交点 } \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0 \right)$$

$$\text{所以, 面积 } S = \frac{1}{2} \frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)} = 4 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{于是, } 8f'(x_0) = f^2(x_0)$$

$$\text{解得 } f(x_0) = \frac{-8}{x_0 + C} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由 } f(0) = 2 \text{ 得 } C = -4$$

$$\text{故由 } x_0 \text{ 的任意性, 得 } f(x) = \frac{-8}{x-4} = \frac{8}{4-x} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

高等数学(下)

课程号: 11220173、71220173 课序号: 01-24, 01 开课系: 数学学院

题号	一	二	三	四	总分
题分	30	40	15	15	100
得分					
评阅人					

一、选择题（每题 3 分，共 10 题，合计 30 分）

1. 若 $\int df(x) = \int dg(x)$ ，则下列等式不成立的是_____。

(A). $f(x) = g(x)$

(B). $f'(x) = g'(x)$

(C). $df(x) = dg(x)$

(D). $d \int f'(x)dx = d \int g'(x)dx$

2. 已知曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内任一点处的切线斜率为 $x^2 + 2x$ ，且曲线过点 $(-2, 2)$ ，则曲线方程为

(A). $y = \frac{x^3}{3} + x^2$

(B). $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{2}{3}$

(C). $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{2}{3}$

(D). $y = x^3 - x^2 + \frac{2}{3}$

3. 关于二元函数，下列说法正确的是_____。

(A). 必有极值或最值

(B). 连续时必然可微

(C). 有界闭区域上连续时必有最值

(D). 偏导数存在时，必连续

4. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ ， $f_y(x_0, y_0)$ 连续是 $f(x, y)$ 在该点可微的（ ）。

(A). 必要条件

(B). 充分必要条件

(C). 充分条件而非必要条件

(D). 既非充分条件又非必要条件

5. 如果 $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $\int_0^2 f(x)dx = -1$, 则 $\int_1^2 f(x)dx = (\quad)$.

- (A). -2 (B). 2 (C). 0 (D). 不确定

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (A). 0 (B). $\frac{1}{2}$ (C). 1 (D). 不存在

7. 若方程 $x = \ln \frac{z}{y} + xy$ 确定 z 是 x, y 的函数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (A) 1 (B). $e^x + y$ (C). $ye^x + y$ (D). $y(1-y)e^{x(1-y)}$

8. 下列广义积分收敛的是().

- (A). $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (B). $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ (C). $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ (D). $\int_1^{+\infty} \sqrt{x} dx$

9. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处存在对 x, y 的偏导数, 则 $f'_x(x_0, y_0) = (\quad)$

- (A). $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ (B). $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x}$
(C). $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ (D). $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$

10. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微的充分条件是()

- (A). $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续 (B). $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处存在偏导数
(C). $\lim_{\rho \rightarrow 0} [\Delta z - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y] = 0$
(D). $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{[\Delta z - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\rho} = 0$

二、计算题 (其中 1-4 题每题 6 分, 5-6 题 8 分, 共 40 分)

1. 计算不定积分 $\int \sin^3 x dx$.

2. 已知 $f'(\ln x) = x + x^2$, 求 $f(x)$.

3. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$.

4. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$

5. 设 $z = f[xy, \cos(xy)]$, f 具有连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

6. 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数, $y = y(x), z = z(x)$ 分别由方程 $e^{xy} - y = 0$ 和 $e^z - xz = 0$ 确定,
求 $\frac{du}{dx}$

三、几何应用题（15 分）

已知曲线 $y = \sin x, x = \frac{\pi}{2}, y = 0$ 围成的平面图形 D

- (1) 求平面图形 D 的面积 S . (5 分);
- (2) 求 D 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_x (5 分)
- (3) 求 D 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_y (5 分) .

四、经济应用题（15 分）

设生产某种产品必须投入两种要素， x_1, x_2 分别为两种要素的投入量， Q 为产出量，若生产函数为 $Q = 2x_1^\alpha x_2^\beta$ ，其中 α, β 为正常数，且 $\alpha + \beta = 1$ ，假设两种要素的价格为 p_1, p_2 。请回答下列问题：

（1）求产量 Q 分别对两种要素投入量 x_1, x_2 的产量偏弹性 $\frac{EQ}{Ex_1}, \frac{EQ}{Ex_2}$ 。（6 分）

（2）当产出量为 12 时，两种要素各投入多少可以使得投入总费用最小（9 分）

高等数学（下）

课程号: 11220173 课序号: 01-19 开课学院: 数据科学与人工智能学院
 课程号: 71220173 课序号: 01 开课学院: 数据科学与人工智能学院

题号	一	二	三	总分
题分	20	65	15	100
得分				
评阅人				

一、选择题（每小题 2 分，共 20 分）

- $\frac{2}{3}\arctan 2x$ 是 $f(x) = \frac{k}{1+4x^2}$ 的一个原函数，则 $k = (\quad)$
 A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$
- $d\left(\int df(x)\right) = (\quad)$
 A. $f'(x)$ B. $f'(x)dx$
 C. $f(x)$ D. $f(x)dx$
- $\int_0^1 (\sqrt{2x-x^2} - x)dx = (\quad)$
 A. $1 - \frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ C. $1 - \frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{4}$
- 已知 $f(x)$ 是实数集上的连续奇函数，且 $f(x)$ 不恒为零，则下列函数中不是 $f(x)$ 的原函数的是 $(\quad)$
 A. $\int_{-x}^0 f(t)dt$ B. $\int_{-x}^0 f(-t)dt$ C. $\int_0^{-x} f(t)dt$ D. $\int_0^x f(t)dt$
- 与 Z 轴和点 $A(1, 0, 2)$ 等距离的轨迹方程是 $(\quad)$

A. $z^2 + 2z - 2x - 2 = 0$ B. $z^2 - 4z - 2x + 5 = 0$

C. $2x - 5 = 0$ D. $2x - 1 = 0$

6. 下列说法恒成立的是 ()

A. $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x)$ B. $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = 0$

C. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$.D. 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足 $\int_a^b f(x) dx > 0$, 则 $f(x) > 0$.

7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin x}{x^2 + y^2} = ()$

A. 0 B. 1 C. ∞ D. 不存在, 但不是 ∞

8. 函数 $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处 ()

A. 极限不存在 B. 极限存在, 但不连续

C. 连续, 但 $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$ 不存在 D. $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$ 存在, 但不可微

9. 已知函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 0)$ 存在偏导数, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 0) - f(1, 2h)}{h} = ()$

A. $-f_x(1, 0)$ B. $f_y(1, 0)$

C. $f_x(1, 0) + 2f_y(1, 0)$ D. $f_x(1, 0) - 2f_y(1, 0)$

10. 设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{f(x, y) - x + 2y + 2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$, 则 $dz|_{(1,0)} = ()$

A. $dx + 2dy$ B. $dx - 2dy$

C. $-dx + 2dy$ D. $-dx - 2dy$

二、计算题 (1-7 题每题 6 分, 8 题 7 分, 9-10 题每题 8 分, 共 65 分)

1. 计算不定积分 $\int \frac{1+2x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)} dx$

2. 计算不定积分 $\int \frac{10^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

3. 计算 $\int_{\frac{1}{e}}^{2e} |\ln x| dx$

4. 计算定积分 $\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{3-x^2} dx$

5. 判断反常积分 $\int_0^{+\infty} (1+x)^{-\frac{1}{3}} dx$ 的敛散性, 若收敛求其值。

6. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\int_x^0 \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt}$

7. 计算瑕积分 $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$

8. 设 $z = ue^v$, $u = x^y$, $v = x + y$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

9. 求函数 $z = \ln \cos \frac{x}{y}$ 的全微分 dz 以及 $dz|_{(\pi, 4)}$.

10. 设 $z = f(x \ln y, x + y)$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

三、(15分) 设曲线 $x = 2y^2$, $x = 1 + y^2$ 围成图形 D , 求:

(1) 平面图形 D 的面积.

(2) D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V_x .

(3) D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V_y .

高等数学（下）

课程号: 11220173 课序号: 01-19 开课学院: 数据科学与人工智能学院
 课程号: 71220173 课序号: 01 开课学院: 数据科学与人工智能学院

题号	一	二	三	总分
题分	20	65	15	100
得分				
评阅人				

一、选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. $k \ln \sin 3x$ 是 $f(x) = k \cot 3x$ 的一个原函数，则 $k = (\quad)$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 3 D. -3

2. $d\left(\int f'(x)dx\right) = (\quad)$

- A. $f(x) + C$ B. $f(x)dx$
 C. $f'(x) + C$ D. $f'(x)dx$

3. $\int_0^1 (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{2x-x^2} - 1)dx = (\quad)$

- A. 1 B. $1 - \frac{\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2} - 1$

4. 已知 $f(x)$ 是实数集上的一个连续函数，则下列论述正确的是()

- A. 如果 $f(x) < 0$ ，则 $\int_0^x f(t)dt < 0$ B. 如果 $f(x) > 0$ ，则 $\int_0^{x^2} f(t)dt > 0$
 C. 如果 $f(x) \neq 0$ ，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是关于 x 的单调函数

D. 如果 $f(x) \neq 0$, 则 $\int_0^x f^2(t)dt$ 是关于 x 的单调函数

5. 点 $(2, 0, 1)$ 在下面的某个曲面上, 该曲面是 ()

A. $x^2 + y^2 = 2$ B. $x^2 + y^2 - 2z = 2$ C. $2x^2 - 3y^2 = z$ D. $\ln(x^2 - y^2) = z$

6. 下列说法不恒成立的是 ()

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ B. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

C. $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ D. $\int_a^a f(x)dx = 0$

7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sqrt{xy^2+1}-1}{\ln(1+xy)} = ()$

A. 0 B. 2 C. 1 D. -1

8. 函数 $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^4 + y^4}, & xy = 0, \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处 ()

A. 极限存在 B. 连续 C. $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$ 存在 D. 可微

9. 已知函数 $f(x, y)$ 满足 $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 1$, 则以下错误的是 ()

A. $df(0, 0) = dx + dy$

B. $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x, 0) - f(2x, 0)}{x} = 1$

D. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, -y)}{y} = 2$

10. 设函数 $z = \frac{x-y}{x+y}$, 且 $dz = Md(x-y) + Nd(x+y)$, 则 $M + N = ()$

A. $\frac{1+x^2-y^2}{x+y}$

B. $\frac{2y}{(x+y)^2}$

C. $\frac{2(y-x)}{(x+y)^2}$

D. 0

二、计算题（1-7 题每题 6 分，8 题 7 分，9-10 题各 8 分，共 65 分）

1. 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^2 \cdot (1+x^2)} dx$

2. 计算不定积分 $\int \frac{10^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

3. 计算定积分 $\int_0^1 e^x \sin x dx$

4. 计算定积分 $\int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx$

5. 判断反常积分 $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$ 的敛散性，若收敛求其值。

6. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt - x}{\sin x - x}$

7. 计算瑕积分 $\int_{\frac{1}{2}}^e \frac{1}{x \sqrt{1-\ln^2 x}} dx$

8. 设 $h = u^2 - v^2$, $u = e^{xy}$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$.

9. 求函数 $z = (x+y)^{(x+y)}$ 的全微分 dz 以及 $dz|_{(1,1)}$.

10. 设 $z = f(x, \frac{2x}{y})$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

三、（15分）

设曲线 $y = 5x^2$, $y = 1 + x^2$ 围成图形 D , 求:

(1) 平面图形 D 的面积.

(2) D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V_x .

(3) D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V_y .

高等数学（下）

课程号: 11220173 课序号: 01-19 开课学院: 数据科学与人工智能学院
 课程号: 71220173 课序号: 01 开课学院: 数据科学与人工智能学院

题号	一	二	三	总分
题分	20	65	15	100
得分				
评阅人				

一、选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. $\frac{2}{3} \ln \cos 3x$ 是 $f(x) = k \tan 3x$ 的一个原函数，则 $k = (\quad)$

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. -2 D. 2

2. $\int d \arctan \sqrt[3]{x} = (\quad)$

- A. $\arctan \sqrt[3]{x}$ B. $\arccot \sqrt[3]{x}$
 C. $\arctan \sqrt[3]{x} + C$ D. $\arccot \sqrt[3]{x} + C$

3. 下列各式不正确的是()

- A. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0$ B. $\int_{-\pi}^0 \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx$
 C. $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

4. 设 $f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$, $g(x) = \int_0^{x^2} \sin t dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的()

- A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小 C. 同阶但非等价无穷小 D. 等价无穷小

5. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 下列说法正确的是 ()

A. $x^2 + y^2 = 2$ 是以 $(0, 0)$ 为圆心, 半径为 2 的圆。

B. $x^2 + y^2 = z^2$ 是旋转抛物面。

C. $x = 2$ 是一条直线。

D. $2x^2 - y^2 = z$ 是双曲抛物面。

6. 如果 $f(x)$ 在 $[-2, 3]$ 上连续, 且平均值为 2, 则 $\int_{-2}^3 f(x) dx = (\quad)$

A. 10 B. 2 C. -2 D. -10

7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{\sin(x - y)} = (\quad)$

A. 0 B. 2 C. 1 D. ∞

8. 函数 $f(x, y) = \begin{cases} x^4 + y^4, & xy = 0, \\ 2, & xy \neq 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处 $(\quad)$

A. 极限存在 B. 连续 C. $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$ 存在 D. 可微

9. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, 且 $dz|_{(x_0, y_0)} = 2dx + 3dy$, 则极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h, y_0) - f(x_0 - h, y_0)}{h} = (\quad)$$

A. 6 B. 4 C. 3 D. 2

10. 设函数 $z = \arctan \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$, 且 $dz = Md(x^2 + y^2) + Nd(x^2 - y^2)$, 则 $\frac{M}{N} = (\quad)$

A. $-\frac{y}{x}$

B. $\frac{x^2 + y^2}{y^2 - x^2}$

C. $\frac{x(x^2 - y^2)}{y(x^2 + y^2)}$

D. $\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$

二、计算题 (1-7 题每题 6 分, 8 题 7 分, 9-10 题每题 8 分, 共 65 分)

1. 计算不定积分 $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \cdot \sqrt{x} dx$

2. 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^3} \cdot \sin \frac{1}{x^2} dx$

3. 计算定积分 $\int_0^1 x \arctan x dx$

4. 计算定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

5. 判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 的敛散性, 若收敛求其值。

6. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\sin x}^0 t \ln(1+t) dt}{\sqrt{1+x^2} - 1}$

7. 计算瑕积分 $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx$

8. 设 $z = u + v$, $u = e^{xy}$, $v = \ln \frac{x}{y}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

9. 设函数 $f(x)$ 可微, 且 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 求 $z = f(4x^2 - y^2)$ 的全微分 dz 以及 $dz|_{(1,2)}$.

10. 设 $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

三、（15分）设曲线 $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \sqrt{8-x^2}$ 围成图形 D , 求:

(1) 平面图形 D 的面积.

(2) D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V_x .

(3) D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V_y .

高等数学（下）

课程号: 11220173 课序号: 01-19 开课学院: 数据科学与人工智能学院
 课程号: 71220173 课序号: 01 开课学院: 数据科学与人工智能学院

题号	一	二	三	总分
题分	20	65	15	100
得分				
评阅人				

一、选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. $k \ln \cos 3x$ 是 $f(x) = \tan 3x$ 的一个原函数，则 $k = (\quad)$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 3 D. -3

2. $\frac{d}{dx} \left(\int \frac{1}{1+x^2} dx \right) = (\quad)$

- A. $\frac{1}{1+x^2}$ B. $\frac{1}{1+x^2} + C$
 C. $\frac{1}{1+x^2} dx$ D. $\arctan x + C$

3. $\int_0^1 (1 - \sqrt{2x - x^2}) dx = (\quad)$

- A. $1 - \frac{\pi}{4}$ B. 1 C. $1 - \frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{4}$

4. 已知 $f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$ ，则 $f'(2) = (\quad)$

A. $4e^{16}$ B. $4e^4$ C. e^{16} D. $2e^{16}$

5. 点 $(2, 3, 1)$ 关于 xy 平面的对称点是 ()

A. $(2, 3, -1)$ B. $(2, -3, -1)$ C. $(-2, 3, 1)$ D. $(-2, 3, -1)$

6. 下列说法正确的是 ()

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx > \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx < \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ D. $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 x dx < \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx$

7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} (1+xy)^{\frac{1}{x}} = ()$

A. e B. $\frac{1}{e}$ C. 1 D. e^2

8. 函数 $f(x, y) = |x| + |y|$ 在 $(0, 0)$ 处 ()

A. 极限不存在 B. 连续, 但 $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$ 不存在
C. $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$ 存在, 但不可微 D. 可微

9. 当下述条件 () 成立时, 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是可微的.

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

B. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = 0$ 且 $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = 0$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f_x(x, y_0) = f_x(x_0, y_0)$ 且 $\lim_{y \rightarrow y_0} f_y(x_0, y) = f_y(x_0, y_0)$

10. 设函数 $z = (x^2 + y^2)e^{xy}$, 且 $dz = Md(x^2 + y^2) + Nd(xy)$, 则 $\frac{M}{N} = ()$

A. $\frac{1}{x^2 + y^2}$ B. $\frac{x}{y}$

C. $\frac{2x+x^2y+y^3}{2y+xy^2+x^3}$

D. $\frac{e^{xy}}{x^2+y^2}$

二、计算题（1-7 题每题 6 分，8 题 7 分，9-10 题每题 8 分，共 65 分）

1. 计算不定积分 $\int e^x \cdot (1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}) dx$

2. 计算不定积分 $\int \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$

3. 计算定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

4. 计算定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

5. 判断反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ 的敛散性，若收敛求其值。

6. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\int_x^0 \ln(1+t^2) dt}$

7. 计算瑕积分 $\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(x-4)(6-x)}}$

8. 设 $z = uv$, $u = e^{\cos x}$, $v = \sin x$ 求 $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$.

9. 求函数 $u = (\frac{y}{x})^{\frac{1}{z}}$ 的全微分 du 以及 $du|_{(1,1,1)}$.

10. 设 $z = f(\frac{y}{x}, \frac{x}{y})$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

三、（15分）设曲线 $x = 5y^2, x = 1 + y^2$ 围成图形 D , 求:

(1) 平面图形 D 的面积.

(2) D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V_x

(3) D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V_y

